



Nano-membranes à cristal photonique pour l'optomécanique

Kevin Makles

► To cite this version:

Kevin Makles. Nano-membranes à cristal photonique pour l'optomécanique. Physique Quantique [quant-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2015. Français. NNT : 2015PA066457 . tel-01290469

HAL Id: tel-01290469

<https://theses.hal.science/tel-01290469>

Submitted on 18 Mar 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Spécialité : Physique

École doctorale : « Physique en Île-de-France »

réalisée au

Laboratoire Kastler Brossel

présentée par

Kevin Makles

pour obtenir le grade de :

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Sujet de la thèse :

**Nano-membranes à cristal photonique pour
l'optomécanique**

soutenue le 16 juin 2015

devant le jury composé de :

M.	Ariel Levenson	Rapporteur
M.	François Bondu	Rapporteur
M ^{me}	Jean-Marc Frigero	Examineur
M ^{me}	Sara Ducci	Examineur
M ^{me}	Eva Weig	Examineur
M ^{me}	Isabelle Robert-Philip	Membre invité
M.	Antoine Heidmann	Directeur de thèse

Table des matières

Introduction	v
1 Mesure de déplacement en optomécanique	1
1.1 La mesure interférométrique optique	1
1.1.1 Mesure de position avec une cavité Fabry-Perot	1
1.1.2 Sensibilité de la mesure de petits déplacements	3
1.2 Dynamique d'un oscillateur mécanique	4
1.2.1 Equivalence avec l'oscillateur harmonique	4
1.2.2 Susceptibilité effective d'un mode acoustique	8
2 Réflecteurs à cristaux photoniques membranaires	11
2.1 Contexte et objectifs	11
2.2 Equations de Maxwell dans un milieu : un problème aux valeurs propres	13
2.2.1 Equations de Maxwell dans un milieu	13
2.2.2 Problème aux valeurs propres	13
2.3 Symétrie du cristal photonique	14
2.3.1 Invariance par translation discrète : théorème de Bloch-Floquet .	14
2.3.2 Cas d'un cristal membranaire	20
2.4 Cristaux photoniques : vers un réflecteur en incidence normale	23
2.4.1 Régime spéculaire	23
2.4.2 Approche du comportement par la théorie des modes couplés . .	25
2.4.3 La méthode d'analyse par couplage entre ondes planes (RCWA)	28
2.4.4 Réflecteur à cristal photonique à 1D	33
2.4.5 Réflecteur à cristal photonique à 2D	37
2.5 Discussions	38
2.5.1 La méthode FDTD	38
2.5.2 Influence de la taille du waist	39
2.5.3 Taille finie du cristal	41
2.5.4 Déviation conique	42
2.6 Fabrication	43
2.7 Caractérisation des membranes à cristal photonique	45
2.7.1 Mesures préliminaires	45
2.7.2 Mesures de plateaux de haute réflectivité	48

3	Conception et caractérisation mécanique du résonateur	51
3.1	Développement de la géométrie	51
3.1.1	Etude des mécanismes de perte	52
3.1.2	Caractérisation mécanique des échantillons	62
3.2	Méthode de Rayleigh appliquée à une poutre sous tension	73
3.2.1	Energie potentielle de flexion	74
3.2.2	Énergie potentielle de tension	75
3.2.3	Énergie potentielle élastique axiale	77
3.2.4	Énergie cinétique	77
3.2.5	Fréquence de résonance	77
3.3	Régime non linéaire	78
3.3.1	Modèle de Duffing	79
3.3.2	Effet statique de la non-linéarité	81
3.3.3	Effet dynamique de la non-linéarité	82
4	Mesure et contrôle du bruit thermique	87
4.1	Comportement d'une cavité Fabry-Perot	87
4.1.1	Modes gaussiens d'une cavité Fabry-Perot	87
4.1.2	Évolution du champ dans une cavité Fabry-Perot	88
4.1.3	Adaptation spatiale du faisceau incident	90
4.2	Conception de la cavité	91
4.2.1	Des coupleurs d'entrée à très petit rayon de courbure : μ RoC	91
4.2.2	La cavité à petit col	93
4.2.3	Caractérisation des μ ROC	93
4.3	Présentation du montage expérimental	94
4.3.1	Dispositif de mesures	94
4.3.2	Détection de phase du faisceau réfléchi	96
4.4	Réponse aux forces de Langevin	101
4.5	La friction froide	103
4.5.1	Le principe de la friction froide	103
4.5.2	Implémentation de la boucle de rétroaction	106
4.5.3	Mesures de refroidissement	107
4.5.4	L'auto refroidissement	108
5	Couplage capacitif d'une nano-membrane à cristal photonique	113
5.1	Modèle analytique pour un diélectrique dans un champ lointain station- naire	113
5.1.1	Equation de Maxwell dans un diélectrique	113
5.1.2	Capacité du peigne d'électrodes en présence d'une diélectrique épais	120
5.1.3	Cas d'une membrane épaisse.	122
5.1.4	Cas d'une membrane fine	124
5.1.5	Multicouche	127
5.2	Fabrication de peignes d'électrodes sous la membrane	130
5.3	Intégration du dispositif pour l'optomécanique	132
5.3.1	Vue d'ensemble du système	132

5.3.2	Montage Expérimental	138
5.3.3	Mesures des constantes de couplage	138
5.4	Conclusion	142

Introduction

Les conséquences du couplage entre un faisceau laser et un résonateur mécanique induit par la pression de radiation ont été étudiées pour la première fois dans les années 1970 [1]. L'objectif initial était de comprendre les limites fondamentales sur la sensibilité des mesures interférométriques très sensibles, telles que la détection d'ondes gravitationnelles. Ce n'est qu'une trentaine d'années plus tard, grâce à l'évolution des techniques de micro-fabrication, que la perspective d'observer et de contrôler l'état quantique d'un résonateur mécanique vit le jour. C'est ainsi que s'est développé le domaine de l'optomécanique : champ de recherche dédié à l'étude du couplage entre un champ électromagnétique et les fluctuations de position d'un résonateur mécanique. Le but premier était l'observation de l'état quantique de résonateurs mécaniques macroscopiques. En plus du développement de tels résonateurs, les chercheurs se sont consacrés au perfectionnement des techniques de détection de tels états. Au fil des années, une incroyable diversité de résonateurs a été développée, différents tant par les matériaux utilisés, que par leur taille, ou encore par leurs caractéristiques géométriques. Nous allons rappeler en guise d'introduction les caractéristiques que doivent présenter de tels résonateurs pour que leur état quantique soit accessible expérimentalement. Dans un deuxième temps nous aborderons une nouvelle direction poursuivie dans le domaine, à savoir, le couplage de systèmes optomécaniques avec d'autres systèmes quantiques bien contrôlés.

Vers le régime quantique d'un oscillateur mécanique

Comme nous l'exposerons dans le prochain chapitre, un oscillateur mécanique peut être considéré, dans certaines circonstances, comme un oscillateur harmonique. Celui-ci, dans le formalisme de la mécanique quantique, est décrit par le Hamiltonien canonique :

$$\hat{H} = \hbar\omega_m(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}), \quad (0.0.1)$$

où ω_m est la pulsation propre de l'oscillateur, \hbar la constante de Planck réduite, et où \hat{a}^\dagger et \hat{a} sont les opérateurs de création et d'annihilation de phonons dans le mode mécanique reliés aux opérateurs linéaires de position \hat{X} , et d'impulsion \hat{P} , par :

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{M\omega_m}{2\hbar}} \left(\hat{X} + i\frac{\hat{P}}{M\omega_m} \right), \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{M\omega_m}{2\hbar}} \left(\hat{X} - i\frac{\hat{P}}{M\omega_m} \right). \quad (0.0.2)$$

Dans les formules précédentes M désigne la masse du mode. $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ est l'observable correspondant au nombre de phonons peuplant le mode mécanique. Il possède un spectre discret, formé des l'ensemble des entiers positifs. Ainsi, le Hamiltonien \hat{H} , associé à l'énergie du système, possède lui aussi un spectre discret de valeurs propres, $\{E_n = \hbar\omega_m(n + \frac{1}{2})\}_{n \in \mathbb{N}}$. Le spectre de \hat{H} est représenté Figure 0.1, ainsi que le potentiel harmonique $V(x)$. Les niveaux d'énergie, notés $|n\rangle$, sont séparés d'une énergie constante $\hbar\omega_m$. Ils correspondent à la présence de n phonons dans le mode mécanique. D'après le forme du Hamiltonien, la mécanique quantique prédit une énergie non-nulle $E_0 = \hbar\omega_m/2$ lorsque l'oscillateur se trouve dans son état fondamental ($n = 0$). Cette énergie

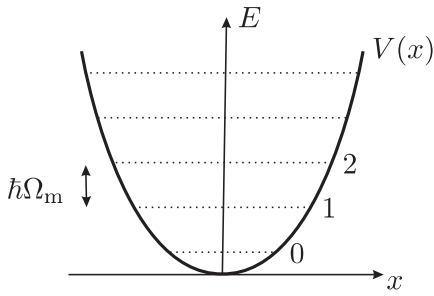


Fig. 0.1 Les niveaux d'énergie d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_m .

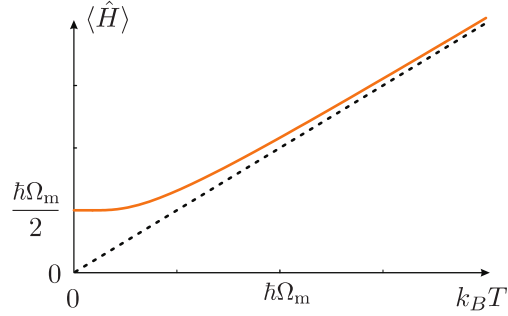


Fig. 0.2 Energie de l'oscillateur harmonique dans la description quantique (ligne continue) et dans la description classique (ligne pointillée).

fondamentale non nulle peut être interprétée comme une conséquence des inégalités de Heisenberg :

$$\Delta \hat{X} \cdot \Delta \hat{P} \geq \hbar/2. \quad (0.0.3)$$

Ces inégalités découlent de la non-commutation des opérateurs \hat{X} et \hat{P} . Elles indiquent que la position et l'impulsion de l'oscillateur ne peuvent être parfaitement définies simultanément. En outre, elles empêchent le système de demeurer dans l'état classique ($x = 0, p = 0$).

La densité de probabilité de présence de tels états est une gaussienne dont la position moyenne est nulle, $\langle \hat{X} \rangle = 0$, et l'écart quadratique moyen est égal à :

$$\Delta \hat{X}^2 = \frac{\hbar}{2M\omega_m} \quad (0.0.4)$$

$$\equiv x_{ZPF}^2 \quad (0.0.5)$$

Ces fluctuations autour de la position d'équilibre sont appelées fluctuations de point zéro. En mesurant ces fluctuations de position, on peut mesurer l'état quantique du résonateur. Ainsi, pour le développement d'un résonateur optomécanique, on cherchera à les maximiser, en particulier en réduisant la masse du mode ainsi que sa fréquence d'oscillation.

Pour modéliser complètement le système, il faut prendre en compte le couplage avec l'environnement. L'état d'équilibre de l'oscillateur harmonique n'est plus un état

pur, mais un mélange statistique, dont l'énergie moyenne est donnée par [2] :

$$\langle H \rangle_T = \hbar\omega_m \left(n_T + \frac{1}{2} \right), \quad (0.0.6)$$

où n_T est le nombre moyen de phonons thermiques dans les modes de l'environnement à la température T :

$$n_T = \frac{1}{e^{\hbar\omega_m/k_b T} - 1}, \quad (0.0.7)$$

avec T la température et k_b la constante de Boltzmann. La dépendance de cette énergie moyenne en fonction de la température est représentée Figure 0.2 par la ligne continue : elle montre bien une valeur moyenne d'énergie non nulle à température nulle.

Du point de vue classique, l'énergie de l'oscillateur harmonique est donnée par le théorème d'équipartition de l'énergie, qui indique que chaque terme quadratique du Hamiltonien classique a une contribution égale à $1/2k_b T$ à l'énergie moyenne totale du système. Pour l'oscillateur harmonique, cela donne :

$$\langle E \rangle = k_b T. \quad (0.0.8)$$

Cette dépendance est représentée par la courbe pointillée sur la Figure 0.2. La comparaison des expressions 0.0.6 et 0.0.8, obtenues respectivement dans le régime quantique et dans le régime classique, permet de définir une température quantique T_Q en dessous de laquelle une description quantique est requise. Pour une température supérieure, les deux approches convergent :

$$T_Q = \frac{\hbar\omega_m}{k_b}. \quad (0.0.9)$$

Ainsi, pour pouvoir observer l'état quantique d'un résonateur mécanique il faut travailler à des températures inférieures à T_Q . Cette température peut être optimisée en utilisant des fréquences de résonance élevées. En pratique, pour un résonateur de fréquence de résonance de l'ordre du MHz, la température quantique vaut environ $50 \mu\text{K}$, température qu'il n'est pas possible d'atteindre par les techniques de cryogénie conventionnelles. Cependant, comme nous l'illustrerons dans ce manuscrit, d'autres solutions de refroidissement sont envisageables, comme par exemple l'utilisation d'effets de pressions de radiation [3] ou encore de techniques de refroidissement actif [4]. On peut sonder de tels états par la mesure de la variance du déplacement mécanique, qui peut être détecté par des techniques capacitives [5], ou encore d'interférométrie optique [1].

Le développement extrêmement rapide des techniques de micro- et nano-fabrication, a permis, ces 10 dernières années, une réduction considérable de la taille des systèmes, augmentant les fréquences d'oscillations, et donc, rendant plus accessibles les températures quantiques. C'est ainsi que, récemment, plusieurs groupes à travers le monde ont pu observer le régime quantique d'oscillateurs mécaniques ou s'en approcher, mesurant des nombres de phonons thermiques inférieur à 1. On peut noter en particulier le travail d'A. Cleland et son équipe [6], qui ont reporté pour la première fois l'observation d'un résonateur mécanique dans son état fondamental en utilisant un couplage électromagnétique avec un Qubit supraconducteur (voir Figure 0.3 d). Dans ce cas, la fréquence du système étant de quelques GHz, des techniques de cryogénie classique ont été utilisées pour descendre en dessous de la température quantique. O. Painter [7]

et K. Lenhert [5] ont été les premiers à observer les fluctuations de points zéro d'un résonateur mécanique en le refroidissant par pression de radiation, le premier avec des photons optiques (Figure 0.3 b), et le second, des photons micro-ondes, (Figure 0.3 c). On peut noter également les travaux de de T. Kippenberg [8] (Figure 0.3 a), ayant atteint un nombre faible de phonons thermiques, en utilisant des micro-cavités optiques à modes de galerie.

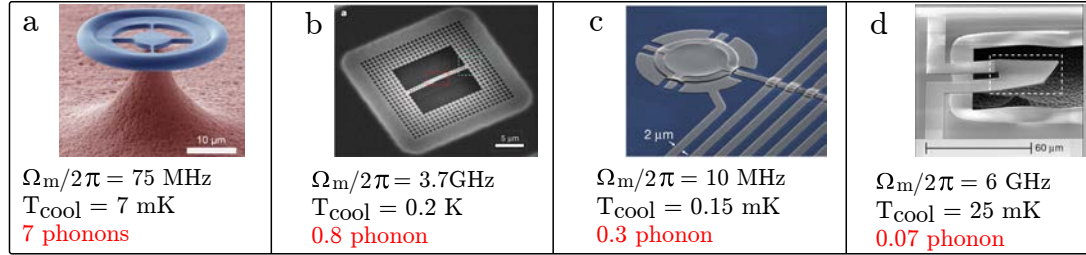


Fig. 0.3 Exemple de résonateurs proches de l'état quantique fondamental. a : Résonateur développé dans l'équipe de T. Kippenberg à Lausanne, b : dans l'équipe d'O. Painter à Caltech, c : dans le groupe de K. Lenhert à Boulder et d : celui d'A. Cleland à l'université de Santa-Barbara.

Au-delà de la simple observation, la prochaine étape pour de tels systèmes est leur contrôle cohérent au niveau quantique. Cela permettrait d'étudier les propriétés quantiques d'objets macroscopiques et possiblement de révéler des mécanismes de décohérence jusque là inexplorés. Ou encore, d'un point de vue plus appliqué le développement de dispositifs de mesures ultra-sensibles limitées quantiquement. Enfin, le contrôle de résonateurs mécaniques au niveau quantique pourrait permettre l'avènement de nouveaux réseaux d'information quantique en couplant un tel résonateur à d'autres types de systèmes quantiques bien contrôlés.

Vers des systèmes hybrides

Coupler un résonateur optomécanique à un autre dispositif quantique permet de contrôler et de sonder l'état quantique du résonateur mécanique grâce à cet autre système, tout en jouissant des possibilités de contrôle et de détection du second. Du point de vue de l'information quantique, l'intrication des deux systèmes permet l'élaboration de réseaux quantiques pour le transfert et le stockage de l'information [9, 10, 11]. L'enjeu repose, d'une part, sur la réalisation de portes logiques efficaces au niveau quantique, d'autre part sur la capacité à stocker et à transférer l'information quantique de façon fiable sur de longues distances. Par leur capacité de couplage quasi-universelle, les systèmes optomécaniques permettent d'établir un pont entre les différents types de systèmes quantiques et, ainsi, de profiter des avantages de chaque type d'architecture. Certains offrent une forte interaction, idéale pour le calcul, d'autres offrent de très longs temps de cohérence, idéaux pour les mémoires, et d'autres, enfin, permettent le transfert d'information quantique sur de longues distance.

Principalement deux champs de la physique sont au centre de ces développements, et ont déjà permis l'amorce de briques de base pour le traitement de l'information

quantique : la physique atomique [12], et la physique du solide [13]. Grâce à leur forte interaction avec la matière, les photons aux fréquences optiques sont les candidats privilégiés pour l'implémentation de mémoires optiques dans les milieux atomiques, comme cela a déjà été montré dans les vapeurs atomiques [14], les atomes froids [15], ou encore les solides cristallins [16]. Il en va de même pour le transfert de l'information quantique, puisque les photons peuvent se propager sur des dizaines de kilomètres dans des fibres optiques sans absorption. Les systèmes optomécaniques opérant aux fréquences optiques sont donc de très bons candidats pour l'interfaçage et la transduction d'information quantique.

Différents systèmes hybrides ont d'ores et déjà été développés, comme le couplage de résonateurs mécaniques au spin électronique d'un électron dans un solide [17], le couplage d'une boîte de paire de Cooper [18], ou encore à des Qubits supraconducteurs [19]. Malgré les avantages qu'offrent de tels systèmes, les compromis entre les qualités électriques, optiques, ou mécaniques des systèmes, limitent les temps de cohérence de la nano- à la micro-seconde. Pour pouvoir profiter des avantages de chaque système, il est donc nécessaire de pouvoir séparer leurs environnements.

Deux types de systèmes hybrides sont particulièrement prometteurs. Ceux couplant des résonateurs optomécaniques aux atomes, qui offrent la possibilité d'utiliser la véritable "boîte à outils" développée depuis plusieurs dizaines d'années pour le contrôle des degrés de liberté internes ou externes des ces derniers. Et ceux couplant des résonateurs optomécaniques et des circuits micro-ondes, qui offrent la possibilité d'utiliser les techniques novatrices de la physique du solide, telles que les atomes artificiels pour créer des portes logiques [20]. Dans les deux prochaines sections nous allons esquisser les principales caractéristiques nécessaires pour le développement d'un système optomécanique performant, permettant l'hybridation avec chacun de ces deux systèmes.

Le couplage avec des atomes

Comme exposé précédemment, l'avantage d'un tel couplage est la diversité des techniques de manipulation et de mesure développées par la communauté de la physique atomique permettant un contrôle extraordinaire sur l'état quantique d'atomes ou encore d'ions, à l'échelle unique ou collective. De plus, ceux-ci offrent de très longs temps de cohérence, indispensables pour le stockage de l'information quantique.

On recense principalement deux propositions expérimentales pour coupler des atomes à un résonateur mécanique via la pression de radiation. La première, développée dans l'équipe de H.J. Kimble au Caltech, couple un seul atome, piégé dans le champs optique d'une cavité à une membrane insérée dans cette même cavité (Figure 0.4 a). La mise en cavité des systèmes a l'avantage d'augmenter le couplage grâce au recyclage des photons par les miroirs. Cependant, combiner les techniques nécessaires à la manipulation d'atomes froids avec un environnement cryogénique semble expérimentalement très contraignant pour le résonateur [21]. La deuxième, développée dans le groupe de P. Treutlein, à Bâle, présente l'avantage d'isoler l'environnement du mode mécanique de celui des atomes : le résonateur mécanique est inséré dans une cavité Fabry-Perot et le faisceau réfléchi par cette dernière est utilisé pour piéger les atomes froids grâce à la force dipolaire [22].

Pour de tels systèmes, l'Hamiltonien, une fois linéarisé autour des champs moyens [23],

prend la forme suivante, dite “beam-splitter” :

$$\hat{H} = \hbar g_n (\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a}). \quad (0.0.10)$$

Dans cette formule, \hat{a} désigne l’amplitude du mouvement du centre de masse des atomes, \hat{b} celle du mouvement de la membrane, et g_n est le taux de couplage, défini par :

$$g_n = |r_m| \omega_0 \sqrt{\frac{N m_a}{m_n}} \sqrt{\omega_a \omega_m} \frac{2\mathcal{F}}{\pi} \quad (0.0.11)$$

avec $|r_m|$ la réflectivité de la membrane, ω_a la pulsation de l’oscillation du centre de masse des atomes, ω_m la pulsation du résonateur mécanique, m_a la masse atomique, m_m la masse effective de la membrane, N le nombre d’atomes et \mathcal{F} la finesse de la cavité optique. La dynamique cohérente décrite par ce Hamiltonien est l’échange périodique des états quantiques entre la membrane et le mouvement des atomes. La forme de la constante de couplage montre que la différence de masse entre membrane et atomes peut être compensée par la finesse optique de la cavité. En outre, ce coefficient est linéaire en fonction de la réflectivité des membranes.

Une approche originale, née d’une collaboration entre l’équipe “Optomécanique et Mesure Quantique” et l’équipe “Optique Quantique”, consiste à utiliser une membrane à cristal photonique suspendue, développée durant cette thèse, et de la coupler à un nuage d’atomes froids, piégés autour d’une fibre optique étirée. Cette proposition, similaire à celle développée dans le groupe de P. Treutlein, utilise les propriétés du champ optique évanescent d’une fibre étirée pour confiner efficacement les atomes dans les trois directions de l’espace, contrairement au cas de l’espace libre [24, 25]. Par ailleurs, la mise en oeuvre de cristaux photoniques sur la membrane vibrante permet d’augmenter significativement la réflectivité de la membrane comme nous le verrons au chapitre 2. Ainsi, dans cette configuration, la membrane est directement utilisée comme miroir de fond d’une cavité de grande finesse.

Pour exploiter le Hamiltonien 0.0.10 afin de transférer les états quantiques entre les deux systèmes couplés, il est nécessaire que l’échange soit plus rapide que les temps de cohérence des deux systèmes. Ceci peut être formulé en terme de coopérativité C :

$$C = \frac{g_n^2 \eta^2 t^2}{\Gamma_a \Gamma_m} \gg n_{th}, \quad (0.0.12)$$

avec t la transmission due à l’absorption sur le chemin optique entre la membrane et les atomes et η l’efficacité de couplage au mode de la cavité. Nous avons supposé en outre $\omega_a = \omega_m$. Il faudra donc, pour que le système hybride soit couplé quantiquement, que le taux de couplage soit bien supérieur à chacun des amortissements atomique et mécanique. Il est donc nécessaire de réduire autant que possible la masse du résonateur et les pertes mécaniques. Par ailleurs, une réflectivité de la membrane importante est nécessaire pour obtenir une finesse de cavité la plus élevée possible.

Couplage avec un circuit micro-onde

Une deuxième direction consiste à utiliser des membranes à cristal photonique développées durant cette thèse, comme plateforme de transduction entre diverses fréquences du champ électromagnétique. En effet, sous certaines conditions, le couplage

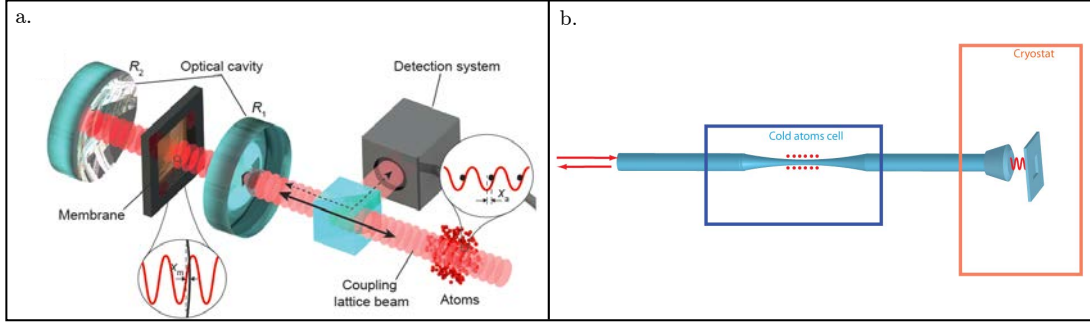


Fig. 0.4 a : Vue d'artiste du couplage d'une membrane mise en cavité avec un nuage atomique piégé dans le champ réfléchi par la cavité, tirée de [26]. b : Schéma du couplage d'une membrane à cristal photonique avec un nuage d'atomes piégés autour d'une fibre optique étirée.

par la force de pression de radiation entre un résonateur mécanique et le mode d'une cavité, linéarisé pour les petites fluctuations de l'amplitude des modes optique \hat{a} , et mécanique \hat{b} , donne lieu à un Hamiltonien de type “beam splitter” :

$$\hat{H} = \hbar g_0 \sqrt{n_0} (\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a}), \quad (0.0.13)$$

où $g_0 = \omega_{cav}/Lx_{zpf}$ est le couplage optomécanique du vide [27], L la longueur de cavité et ω_{cav} sa pulsation. n_0 est le nombre moyen de photons dans le champ d'excitation de la cavité. Comme précédemment, cette dynamique permet d'échanger les états quantiques des deux modes en présence. C'est ce mécanisme qui est par exemple utilisé pour le refroidissement optomécanique, où les phonons thermiques sont changés en photons, qui sont extraits dans l'environnement via l'amortissement optique. Ainsi, deux modes distincts du champ électromagnétique, couplés à un même résonateur mécanique par la force de pression de radiation, peuvent échanger leurs états quantiques via l'état vibratoire du résonateur. Le caractère non-résonant de l'interaction optomécanique permet ainsi de transférer l'information quantique à travers le spectre électromagnétique.

Le concept est particulièrement utile dans le contexte des systèmes d'information quantique à base de qubits supraconducteurs. En effet, les photons micro-ondes utilisés dans ces expériences, extrêmement sensibles à la décohérence thermique, sont confinés dans un environnement cryogénique à quelques centaines de milli-Kelvin. Un dispositif tel que celui de la Figure 0.5 pourrait permettre de les convertir en photons optiques, pouvant se propager sur des dizaines de km, à température ambiante, dans des fibres optiques.

Pour que les opérations d'échange aient lieu plus vite que la décohérence thermique, les deux systèmes optomécaniques doivent opérer dans le régime de couplage cohérent quantique :

$$C > n_{th} \quad (0.0.14)$$

où $n_{th} = k_b T / (\hbar \omega_m)$ est le nombre de phonons thermiques dans l'environnement mécanique, à la température T , et C est la coopérativité optomécanique définie comme :

$$C = \frac{4g_0^2 n_0}{\kappa \Gamma} \quad (0.0.15)$$

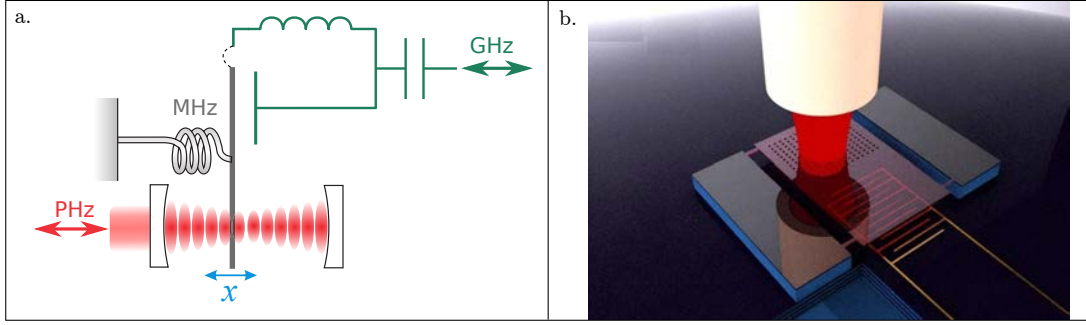


Fig. 0.5 a : Schéma de principe du système hybride permettant de convertir photons micro-ondes en photons optique et vice versa. b : Vue d'artiste d'un convertisseur optomécanique composé d'un condensateur formé par deux électrodes et la nano-membrane à cristal photonique électrodes, ainsi que d'une cavité optique composée de la nano-membrane et d'un second miroir.

avec κ et Γ respectivement les amortissements optique et mécanique.

La Figure 0.5 b présente une vue d'artiste d'un convertisseur optomécanique basé sur une membrane à cristal photonique : le mouvement de la membrane est couplé capacitivement à une cavité micro-onde supraconductrice grâce à une paire d'électrodes interdigitées. La membrane est, par ailleurs, utilisée comme miroir mobile dans une cavité optique de grande finesse.

Une telle plate-forme pourrait ainsi permettre de créer des réseaux d'information quantique entre plusieurs circuits quantiques supraconducteurs distants, ouvrant la voie aux réseaux quantiques à la base de systèmes à l'état solide.

Perspective et cahier des charges

Les différentes caractéristiques qu'un système optomécanique doit présenter pour l'observation de son état quantique fondamental, ou encore, le couplage quantique avec des atomes ou un circuit micro-onde, sont globalement les mêmes. On peut par exemple exprimer le rapport C/n_{th} pour une cavité optique à miroir mobile de longueur L , à la longueur d'onde $\lambda = 1064$ nm, à la température T , avec un résonateur de masse m , une pulsation mécanique ω_m , un facteur de qualité mécanique Q_m , une puissance optique intracavité P , et une finesse \mathcal{F} :

$$\frac{C}{n_{th}} = \frac{8\hbar\mathcal{F}PQ_m}{\lambda c k_B T m \Omega_m}$$

$$\approx 30 \cdot \left(\frac{\mathcal{F}}{20000}\right) \cdot \left(\frac{P}{10 \text{ mW}}\right) \cdot \left(\frac{2 \text{ MHz}}{\Omega_m/2\pi}\right) \cdot \left(\frac{100 \text{ pW}}{m}\right) \cdot \left(\frac{Q_m}{10^5}\right) \cdot \left(\frac{100 \text{ mK}}{T}\right).$$

Dans cette formule, nous avons utilisé la finesse \mathcal{F} , et la puissance intracavité P , ainsi que les paramètres mécaniques (m, Ω_m) , plutôt que le nombre de photons intracavité n_0 et le couplage optomécanique du vide g_0 , car ces paramètres ne sont pas invariants lorsqu'on change la longueur de la cavité. La formule est présentée de telle

sorte que si chaque paramètre prenait la valeur numérique entre parenthèses, le rapport serait égal à 30. Ainsi, atteindre le régime quantique du couplage optomécanique nécessite de combiner un résonateur de très faible masse et de grand facteur de qualité avec une cavité de haute finesse, et d'opérer cette expérience sensible avec des intensités lumineuses importantes à très basse température. La fréquence mécanique doit être la plus faible possible pour augmenter le couplage optomécanique, toutefois, les bruits techniques présents sur la plupart des sources lasers impose une limite pratique autour de quelques centaines de kHz.

Ce manuscrit est consacré au développement d'une nano-membrane à cristal photonique pour l'optomécanique en cavité. Il est composé comme suit : après de brefs rappels sur la mesure optique de déplacement en cavité Fabry-Pérot et une description de la dynamique d'un résonateur mécanique, nous présenterons au chapitre 2, le développement d'un cristal photonique membranaire permettant d'atteindre des réflectivités supérieures à 99.6%. Nous montrerons comment ces résonateurs ont pu être utilisés comme miroirs de fond de cavité Fabry-Perot, donnant lieu à des finesse mesurées supérieures à 2500. Puis nous présenterons le développement et l'étude des propriétés mécaniques des membranes à cristal photonique. Ensuite, nous présenterons des résultats sur l'observation et le contrôle du bruit thermique d'une nano-membrane à cristal photonique. Finalement, nous présenterons la mise en oeuvre et les mesures réalisées à l'aide d'un dispositif de couplage capacitif. Ces dernières expériences constituent un premier pas vers le développement d'un convertisseur quantique entre photons optiques et micro-ondes.

Chapitre 1

Mesure de déplacement en optomécanique

1.1 La mesure interférométrique optique

Nous présentons dans cette partie le principe de la mesure optique du mouvement du résonateur. Nous déterminons la sensibilité attendue, et discutons de la mise en oeuvre expérimentale de cette technique avec des micro-résonateurs.

1.1.1 Mesure de position avec une cavité Fabry-Perot

On considère un faisceau laser injecté dans une cavité Fabry-Perot (Figure 1.1) formée d'un coupleur d'entrée partiellement réfléchissant et d'un miroir déposé sur le résonateur mécanique à étudier. Ce dernier peut être considéré comme totalement réfléchissant, de sorte que, si l'on néglige les pertes du coupleur, l'intensité réfléchie par la cavité est égale en moyenne à l'intensité incidente, et ce indépendamment du désaccord de fréquence entre la cavité et le laser.

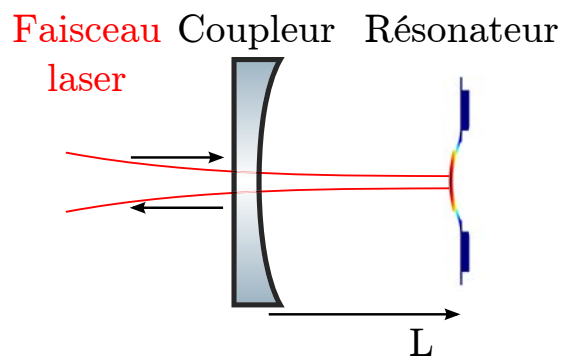


Fig. 1.1 Cavité Fabry-Perot à une seule entrée-sortie. Le résonateur à l'arrière est totalement réfléchissant, de sorte que tous les photons ressortent par le coupleur d'entrée.

L'intensité intra-cavité, par contre, varie en fonction de la longueur de la cavité L . Lorsque L est un multiple de la demi-longueur d'onde $\lambda/2$, les différentes ondes

créées par les multiples réflexions sur les miroirs interfèrent de manière constructive et l'intensité intracavité \bar{I} présente un maximum. Lorsque l'on fait varier L autour d'une telle résonance, cette intensité décrit un pic d'Airy de forme Lorentzienne dont la hauteur est proportionnelle à l'intensité incidente \bar{I}^{in} selon la formule :

$$\bar{I} = \frac{2}{\pi} \mathcal{F} \bar{I}^{\text{in}}, \quad (1.1.1)$$

où \mathcal{F} est la finesse de la cavité, qui dépend uniquement des caractéristiques optiques des miroirs (transmission du miroir d'entrée si l'on néglige les pertes). L'effet d'amplification entre les intensités incidente et intracavité permet d'interpréter la finesse comme le nombre moyen d'aller-retour qu'effectue un photon dans la cavité avant d'en ressortir. Elle correspond également au rapport entre la distance $\lambda/2$ entre deux résonances et la largeur à mi-hauteur $\lambda/2\mathcal{F}$ de la fonction d'Airy (voir la Figure 1.2).

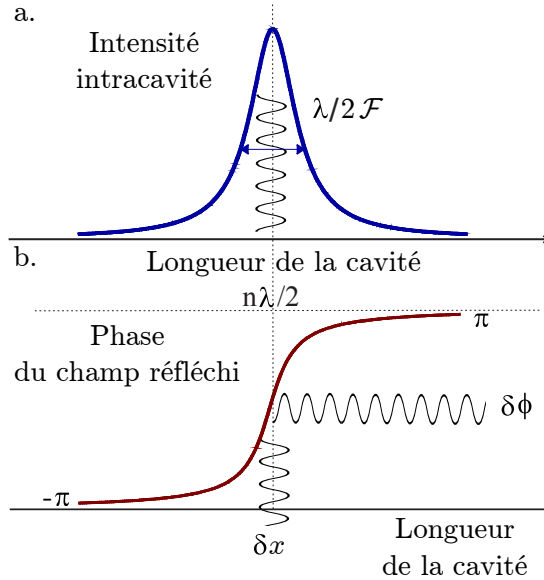


Fig. 1.2 a. : pic d'Airy décrit par l'intensité intracavité lorsque la longueur de la cavité est balayée au voisinage d'une résonance. b. : déphasage du faisceau réfléchi par la cavité. On constate qu'à la résonance de la cavité, la phase est très sensible à des variations de longueur.

La phase du faisceau réfléchi est elle aussi sensible à un changement de longueur de la cavité. Lorsque le miroir se déplace d'une quantité de l'ordre de $\lambda/2\mathcal{F}$ de part et d'autre de la résonance de la cavité, la phase du faisceau réfléchi subit une variation égale à 2π . La pente de la courbe représentant la phase du champ réfléchi est maximale à résonance et vaut $8\mathcal{F}/\lambda$ (voir la Figure 1.2). Le déphasage $\delta\varphi^{\text{out}}$ produit à résonance par un petit déplacement δx du résonateur s'écrit alors

$$\delta\varphi^{\text{out}} = 8\mathcal{F} \frac{\delta x}{\lambda}. \quad (1.1.2)$$

Ce déphasage est à comparer avec le déphasage équivalent qui aurait été mesuré avec un simple interféromètre de Michelson : $\delta\varphi = 4\pi\delta x/\lambda$. La multiplication des aller-

retour de la lumière entre les deux miroirs amplifie ainsi l'effet du mouvement sur la lumière par un facteur \mathcal{F} . La sensibilité d'un Fabry-Perot est donc bien meilleure que celle d'un dispositif d'interférence à deux ondes, à condition de rester au voisinage des résonances optiques de la cavité. Par exemple avec une finesse de 30 000 et une longueur d'onde de $1\ \mu\text{m}$, la largeur des pics d'Airy correspond à une variation de longueur de 18 picomètres.

Ce dispositif se révèle être un outil extrêmement puissant pour mesurer les petits déplacements avec une très grande sensibilité car la phase varie notablement pour des variations de longueur bien plus petites que la longueur d'onde.

Si l'ensemble des sources de bruit classique (vibrations, bruit sismique, bruit de fréquence, fluctuation d'indice optique) est maîtrisé, la sensibilité du dispositif est en dernier lieu limitée par le bruit quantique de phase du faisceau de mesure. Dans ce qui suit, nous allons estimer la sensibilité correspondante.

1.1.2 Sensibilité de la mesure de petits déplacements

Comme nous venons de l'évoquer, à résonance, la phase du faisceau réfléchi par la cavité Fabry-Pérot de grande finesse est très sensible aux déplacements du résonateur et peut être utilisée pour mesurer sa position. Dans ce paragraphe, on néglige les effets de la pression de radiation sur les miroirs. Pour déterminer la sensibilité d'une telle mesure, il faut prendre en compte les fluctuations quantiques de phase du faisceau lumineux. Si l'on injecte un faisceau laser cohérent dans une cavité sans pertes, le faisceau sortant à résonance retranscrit les fluctuations de la phase du faisceau incident. Ce bruit de phase $\delta\varphi^{\text{in}}$ d'origine quantique se superpose aux variations de phase dues aux déplacements du micro-miroir et l'équation (1.1.2) devient :

$$\delta\varphi^{\text{out}} = 8\mathcal{F}\frac{\delta x}{\lambda} + \delta\varphi^{\text{in}}. \quad (1.1.3)$$

En particulier, les fluctuations de phase $\delta\varphi^{\text{in}}[\omega]$ d'un faisceau cohérent à la fréquence ω ont une amplitude inversement proportionnelle à la racine carrée du flux moyen de photons \bar{I}^{in} [28]. Le spectre de ces fluctuations s'écrit

$$S_{\varphi}^{\text{in}}[\omega] = \frac{1}{4\bar{I}^{\text{in}}}. \quad (1.1.4)$$

Le plus petit déplacement mesurable δx_{min} est défini à partir de l'équation (1.1.3) en égalisant le signal et le bruit, soit

$$\delta x_{\text{min}} = \frac{\lambda}{16\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{\bar{I}^{\text{in}}}}. \quad (1.1.5)$$

Cette équation montre que la sensibilité de la mesure est d'autant plus grande que la finesse de la cavité et l'intensité incidente sont grandes. Cela reste vrai tant que l'on peut négliger les effets quantiques de la pression de radiation. En effet, l'action en retour de la lumière lors de la mesure de position peut entraîner un excès de bruit de position, qui conduit à une limite quantique standard pour la mesure de déplacement [29].

1.2 Dynamique d'un oscillateur mécanique

Dans cette partie, nous allons rappeler les principales caractéristiques du mouvement d'un oscillateur mécanique.

1.2.1 Equivalence avec l'oscillateur harmonique

Résonateur sans dissipation

Le champ de déformation d'un solide $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ peut être décomposé sur une base orthogonale (pour le produit scalaire défini comme l'intégrale sur le volume du résonateur) $\{\mathbf{u}_n(\mathbf{r})\}$ qui sont les modes propres de la structure, ainsi :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_n a_n(t) \mathbf{u}_n(\mathbf{r}), \quad (1.2.1)$$

où les amplitudes $a_n(t)$ des différents modes acoustiques dépendent des forces appliquées sur le résonateur. On peut alors déterminer le comportement du résonateur en s'intéressant à l'évolution temporelle de chacun des modes pris indépendamment les uns des autres. Dans le cas d'une évolution libre, seulement soumis aux forces de rappel, et non amortie, leur énergie prend la forme

$$E = \frac{1}{2} M_n \left\{ \left[\frac{da_n(t)}{dt} \right]^2 + \omega_n^2 [a_n(t)]^2 \right\} \quad (1.2.2)$$

avec ω_n la pulsation propre du mode $\mathbf{u}_n(\mathbf{r})$ et M_n la masse du mode. Cette dernière correspond à la masse du résonateur effectivement mise en mouvement lors de l'excitation du mode $\mathbf{u}_n(\mathbf{r})$, et qui est définie par

$$M_n = \rho \int d^3\mathbf{r} |\mathbf{u}_n(\mathbf{r})|^2, \quad (1.2.3)$$

où ρ est la densité du matériau constituant le résonateur. Pour le cas où le résonateur est soumis à une force extérieure l'expression 1.2.2 doit être modifiée en rajoutant un terme supplémentaire qui est l'opposé du travail de la force. Décomposé sur chacun des modes propres, il prend la forme

$$W_n = -\langle \mathbf{F}(\mathbf{r}, t), \mathbf{u}_n(\mathbf{r}) \rangle a_n(t). \quad (1.2.4)$$

Le produit scalaire \langle, \rangle va dépendre du type de force appliquée au résonateur. En injectant le terme 1.2.4 dans l'équation 1.2.2, puis en dérivant par rapport au temps on obtient

$$\frac{d^2 a_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 a_n(t) = \frac{1}{M_n} \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}, t), \mathbf{u}_n(\mathbf{r}) \rangle. \quad (1.2.5)$$

On retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique de pulsation ω_n et de masse M_n soumis à une forme $\langle \mathbf{F}(\mathbf{r}, t), \mathbf{u}_n(\mathbf{r}) \rangle$. Ce dernier terme représente le recouvrement spatial entre la force et le profil du mode acoustique. Pour une force volumique, comme les forces d'inertie ou la gravité, le produit scalaire s'intègre sur le volume du résonateur. Pour des forces surfaciques, comme la force de pression de radiation ou des forces électrostatiques, le produit scalaire s'effectue sur la surface du résonateur. L'équation 1.2.5

transposée dans l'espace de Fourier, donne finalement l'expression de l'amplitude spectrale de chaque mode en fonction du recouvrement de la force appliquée au résonateur avec le mode n

$$a_n[\omega] = \chi_n[\omega] \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}, t), \mathbf{u}_n(\mathbf{r}) \rangle, \quad (1.2.6)$$

où l'on a introduit la susceptibilité $\chi_n = 1/M_n(\omega_n^2 - \omega^2)$ du mode acoustique, similaire à celle de l'oscillateur harmonique non amorti, de masse M_n et de pulsation propre ω_n . On retrouve donc bien une expression analogue à la réponse linéaire d'un oscillateur harmonique soumis à une force.

Effet de la dissipation dans le résonateur

Jusqu'à présent, nous avons considéré un résonateur idéal sans phénomène de dissipation. La décomposition en modes propres équivaut à des oscillateurs harmoniques va permettre de modéliser les pertes du résonateur en ajoutant un terme d'amortissement dans les équations d'évolution des amplitudes de chaque mode. Tout phénomène de dissipation est accompagné également de fluctuations du système dues au couplage avec le bain thermique que constitue l'environnement extérieur. Dans le cas d'un oscillateur harmonique, la dissipation est représentée par un angle de perte $\phi_n[\omega]$ dépendant de la fréquence et du mode acoustique induisant une partie imaginaire dans la susceptibilité χ_n [30]

$$\chi_n[\omega] = \frac{1}{M_n(\omega_n^2 - \omega^2 - i\omega_n^2\phi_n[\omega])} \quad (1.2.7)$$

Cette expression suppose que le processus de dissipation agit indépendamment sur chaque mode. Le paramètre $\phi_n[\omega]$ dépend des mécanismes de dissipation dans le résonateur qui sont pour l'heure mal connus. Nous allons donc utiliser des hypothèses simplificatrices pour exprimer sa dépendance en fréquence. Un modèle couramment employé est celui de l'amortissement visqueux où l'oscillateur est soumis à une force proportionnelle et opposée à sa vitesse. L'angle de perte se met alors sous la forme :

$$\phi_n[\omega] = \frac{\omega\Gamma}{\omega_n^2}, \quad (1.2.8)$$

où Γ est le coefficient de frottement visqueux.

Ce qui précède repose sur une modélisation de l'amortissement par un terme de frottement de type visqueux. En réalité il existe de multiples canaux possibles de pertes pour un oscillateur mécanique et tous ne sont pas assimilables à des frottements visqueux. Néanmoins, tant que l'on s'intéresse à des fréquences proches de la résonance mécanique, le type de modélisation utilisé pour les pertes ne joue pas un rôle important et l'on peut se satisfaire de l'expression 1.2.7 pour la susceptibilité mécanique. Le facteur de qualité mécanique de l'oscillateur est alors défini par $Q = \omega_m/\Gamma$. L'oscillateur répond à une force de manière résonnante, avec une largeur spectrale Γ . Pour des fréquences très inférieures à la résonance, il répond en phase avec la force appliquée, tandis qu'il présente une atténuation et un déphasage allant jusqu'à 180° pour des fréquences supérieures à ω_m .

Le spectre de bruit de position

Le terme de dissipation de l'équation 1.2.7 traduit le couplage de l'oscillateur avec l'environnement qui se comporte comme un bain thermique. D'après le théorème de fluctuation-dissipation [30], ce couplage s'accompagne d'une force de Langevin F_T fluctuante décrivant l'interaction du miroir avec un bain d'oscillateur harmoniques thermalisés. La valeur moyenne de cette force est nulle et son spectre est relié à la susceptibilité mécanique par

$$S_{F_T}[\omega] = -\frac{2k_B T}{\omega} \text{Im} \left(\frac{1}{\chi_n[\omega]} \right), \quad (1.2.9)$$

où k_B est la constante de Boltzmann, T la température du résonateur et le spectre $S_{F_T}[\omega]$ défini comme la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation de la force de Langevin :

$$S_{F_T}[\omega] = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \langle F_T(t) F_T(t + \tau) \rangle e^{-i\omega\tau}, \quad (1.2.10)$$

où $\langle \dots \rangle$ représente la moyenne statistique sur le bain thermique.

Lorsque la seule force s'appliquant au résonateur mécanique est la force de Langevin, le spectre de position de l'oscillateur, défini de manière analogue à l'équation 1.2.10, s'écrit

$$S_x^T[\omega] = |\chi_n[\omega]|^2 S_{F_T}[\omega]. \quad (1.2.11)$$

Lorsque le facteur de qualité est suffisamment important, le spectre est de plus en plus piqué au voisinage de la fréquence de résonance et l'on peut approximer le spectre de bruit de la force de Langevin par sa valeur prise en $\omega = \omega_m$. Le spectre du bruit de position de l'oscillateur harmonique s'écrit alors :

$$S_x^T[\omega] = \frac{2\Gamma k_B T}{M_n \left[(\omega_m^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2 \right]} \quad (1.2.12)$$

Lorsque la température T est faible l'équation 1.2.12 n'est plus exacte et il faut prendre en compte les fluctuations quantiques du résonateur et du bain. L'équation 1.2.12 se met alors sous la forme :

$$S_x^T[\omega] = \frac{2\Gamma}{M_n \left[(\omega_m^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2 \right]} \hbar \omega_m \left(n_T + \frac{1}{2} \right), \quad (1.2.13)$$

où n_T est le nombre de phonons thermiques à la température T :

$$n_T = \frac{1}{e^{\hbar \omega_m / k_B T} - 1}. \quad (1.2.14)$$

Lorsque la température est grande devant la température quantique ce nombre se simplifie en $n_T = k_B T / \hbar \omega_m$ et l'on retrouve la limite thermodynamique classique des équations 1.2.9 et 1.2.12. Tandis qu'il tend vers zéro à basse température. Le terme $1/2$ restant alors dans l'équation 1.2.13 correspond aux fluctuations de point zéro de l'oscillateur.

Avant de revenir plus en détail sur les propriétés du spectre obtenu, nous allons va relier le spectre aux grandeurs expérimentales. Lorsque l'on mesure expérimentalement la position de l'oscillateur, on a accès aux variations temporelles de position $x(t)$. La valeur moyenne de cette quantité est nulle si le système n'est pas soumis à une force externe, mais ses fluctuations sont une source d'information importante. Expérimentalement, on les mesure en envoyant ce signal sur un analyseur de spectres qui effectue la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation temporelle $C_x(\tau)$ du signal

$$C_x(\tau) = \langle x(t) x(t + \tau) \rangle \quad (1.2.15)$$

où la moyenne $\langle \dots \rangle$ est définie comme une moyenne temporelle sur la durée du signal acquis. En vertu du principe ergodique, si le temps de mesure est suffisamment long devant le temps de corrélation du réservoir, la moyenne temporelle est égale à la moyenne statistique sur le bain thermique. L'analyseur de spectres mesure le spectre de position $S_x[\omega]$, défini comme la transformée de Fourier de $C_x(\tau)$ [31] :

$$S_x[\omega] = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau C_x(\tau) e^{i\omega\tau}. \quad (1.2.16)$$

Le spectre de position défini en 1.2.13 est donc une grandeur mesurable expérimentalement. De même, la variance expérimentale, c'est-à-dire la valeur quadratique moyenne des variations de position définie par

$$\Delta x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(\tau) d\tau, \quad (1.2.17)$$

est égale à l'écart quadratique moyen $\Delta \hat{X}^2$ défini précédemment. De plus, l'écart quadratique moyen est relié au spectre de position par

$$\Delta x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_x[\omega], \quad (1.2.18)$$

ce qui correspond à l'aire du spectre de bruit thermique.

Pour des températures grandes devant T_Q , le spectre de position est donné par l'équation 1.2.12. Celui ci est très piqué autour de la fréquence de résonance mécanique ω_m , avec une largeur à mi-hauteur égale à Γ . Il correspond à une réponse Lorentzienne à un bruit blanc. Aux fréquences basses devant ω_m , le spectre est indépendant de la fréquence, par contre au-delà de la résonance, on observe une décroissance en $1/\omega^4$ du spectre. Une courbe typique de bruit thermique a été représentée sur la figure 1.3.

Pour une température quelconque, on peut définir une température effective pour l'oscillateur sous la forme

$$k_B \Theta_m = \hbar \omega_m \left(n_T + \frac{1}{2} \right). \quad (1.2.19)$$

La relation 1.2.12 reste alors valable en remplaçant la température classique T par la température effective Θ_m . Le niveau de bruit à la fréquence de résonance mécanique vaut

$$S_x^T[\omega_m] = \frac{2}{M_n \omega_m^2 \Gamma} k_B \Theta_m. \quad (1.2.20)$$

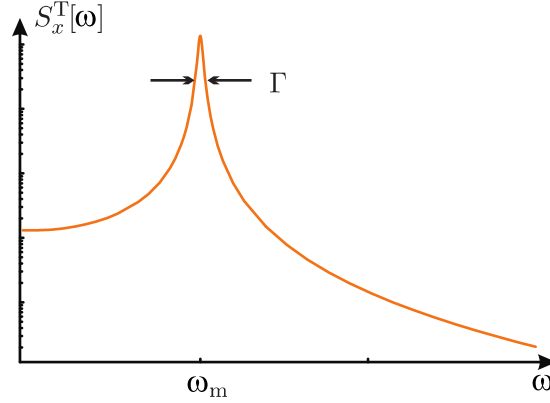


Fig. 1.3 Spectre typique de bruit thermique pour un oscillateur harmonique oscillant à la fréquence ω_m avec un amortissement Γ .

Plus la masse de l'oscillateur est faible, plus son bruit de position est important. La hauteur du pic de bruit thermique varie linéairement avec la température tant que l'on reste au-dessus de la température quantique. Lorsque l'on se rapproche de T_Q , le spectre de bruit thermique à la résonance mécanique atteint une valeur limite correspondant aux fluctuations de point zéro :

$$S_x^Q = \frac{\hbar}{M_n \omega_m \Gamma}. \quad (1.2.21)$$

On peut calculer la valeur quadratique moyenne des fluctuations de position en injectant l'expression 1.2.13 dans l'équation 1.2.18. On obtient

$$\frac{1}{2} M_n \omega_m^2 \Delta x^2 = \frac{1}{2} k_B \Theta_m. \quad (1.2.22)$$

Lorsque la température T est grande devant T_Q , on constate que le théorème d'équipartition de l'énergie est vérifié tandis que lorsque la température du réservoir devient comparable à la température quantique, la variance totale sature à sa valeur quantique intrinsèque donnée par l'expression 0.0.5. Il faut aussi remarquer que la variance totale est indépendante de la manière dont le système est couplé avec son environnement : elle ne dépend pas de la largeur de la résonance mécanique. C'est une conséquence du théorème fluctuation-dissipation : le spectre de la force de Langevin étant lui-même proportionnel à la dissipation, l'aire du spectre de bruit thermique est alors constante, quel que soit le couplage.

Ce sont les évolutions avec la température du spectre de bruit thermique et des fluctuations de position de l'oscillateur, et notamment leur saturation à une valeur minimale lorsque la température quantique est atteinte, qui sont la signature expérimentale du régime quantique de l'oscillateur.

1.2.2 Susceptibilité effective d'un mode acoustique

Comme nous l'avons exposé dans la première partie de ce chapitre la détection des mouvements du résonateur se fait de manière optique, nous allons dans ce paragraphe

décrire l'influence des déformations du résonateur sur le champ réfléchi. Supposons que le champ incident soit gaussien, son profil spatial est donné par

$$v_0(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi\omega_0}} e^{-r^2/\omega_0^2}, \quad (1.2.23)$$

où w_0 est le col du faisceau dans le plan du miroir. En considérant de très petits déplacements du résonateur, le champ \mathcal{E}' après réflexion sur celui-ci subit un déphasage par rapport au champ incident. \mathcal{E} et \mathcal{E}' sont liés en première approximation par :

$$\mathcal{E}' = (1 + 2i\mathbf{k} \cdot \langle \mathbf{u}, v_0^2 \rangle) \mathcal{E}(\mathbf{r}, t). \quad (1.2.24)$$

Ainsi ce déphasage est proportionnel à la moyenne du déplacement du miroir pondéré par l'intensité locale v_0^2 du champ. Cette expression est à comparer avec le déphasage du champ provoqué par un déplacement unidimensionnel valant $\delta\pi = 4\pi\delta x/\lambda$. Il apparaît alors que la déformation de la surface du résonateur est équivalente à un déplacement effectif unidimensionnel faisant intervenir le recouvrement entre la déformation et le faisceau de mesure et dont la valeur est

$$x(t) = \langle u(t), v_0^2 \rangle, \quad (1.2.25)$$

où u est le déplacement du miroir projeté sur la direction du faisceau lumineux. Cela nous permet de réinterpréter le mouvement du miroir vu par la lumière en faisant apparaître une susceptibilité effective pour chaque mode acoustique, soit

$$x[\omega] = \sum_n \langle u(t), v_0^2 \rangle \chi_n[\omega] (\langle \mathbf{F}(\mathbf{r}, \omega), \mathbf{u}_n(\mathbf{r}) \rangle + F_{T,n}[\omega]) \quad (1.2.26)$$

où u_n désigne le déplacement du n -ième mode projeté sur la direction du faisceau lumineux. Dans ces conditions il est possible de définir une susceptibilité effective qui inclut le recouvrement spatial entre la déformation du n -ième mode avec le faisceau lumineux. L'équation précédente se transforme en :

$$x[\omega] = \sum_n \chi_n^{eff}[\omega] (F_n^{eff} + F_{T,n}^{eff}) \quad (1.2.27)$$

où

$$\chi_n^{eff} = \frac{1}{M_n^{eff}(\omega_n^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma)} \quad (1.2.28)$$

est la susceptibilité effective d'un oscillateur harmonique de masse effective

$$M_n^{eff} = \frac{M_n}{\langle u_n, v_0^2 \rangle^2}, \quad (1.2.29)$$

et où

$$F_n^{eff} = \frac{\langle \mathbf{F}(\mathbf{r}, \omega), \mathbf{u}_n(\mathbf{r}) \rangle}{\langle u_n, v_0^2 \rangle}, \quad (1.2.30)$$

et

$$F_{t,n}^{eff} = \frac{F_T}{\langle u_n, v_0^2 \rangle}. \quad (1.2.31)$$

Il ressort de l'équation 1.2.29 que la masse effective peut devenir infinie lorsque le recouvrement entre la lumière et le mode est nul. Ceci traduit que la lumière n'est pas sensible aux déplacements du miroir provoqués par ce mode. On peut également s'assurer grâce aux relations 1.2.9 et 1.2.28- 1.2.29 que la force de Langevin effective $F_{T,n}^{eff}$ agissant sur le mode n vérifie le théorème fluctuation-dissipation associé à la susceptibilité χ_n^{eff} :

$$S_{F_T}^{eff}[\omega] = -\frac{2k_B T}{\omega} \text{Im} \left(\frac{1}{\chi_n^{eff}[\omega]} \right). \quad (1.2.32)$$

On retrouve finalement que le mouvement du miroir x vu par le faisceau lumineux peut être décrit de manière monodimensionnelle.

Chapitre 2

Réflecteurs à cristaux photoniques membranaires

2.1 Contexte et objectifs

Les cristaux photoniques, introduits pour la première fois par Yablonovitch et John en 1987 [32, 33], sont des milieux électromagnétiques dont la constante diélectrique est modulée de façon périodique dans une ou plusieurs directions de l'espace réel [34]. Ces vingt dernières années, grâce au développement informatique permettant la résolution et la simulation des équations de Maxwell dans des milieux complexes, ainsi qu'à l'amélioration des technologies de croissance et de gravure des semiconducteurs, le domaine des cristaux photoniques a connu un véritable essor. Ces structures offrent la possibilité d'un contrôle modal et spatial de la lumière suscitant un vif intérêt pour la communauté de l'optomécanique. Le premier système optomécanique à avoir été observé dans son état quantique fondamental est d'ailleurs un résonateur utilisant ce type de structure [35].

Conventionnellement, la haute réflectivité des résonateurs optomécaniques est assurée par des dépôts de couches diélectriques formant un miroir de Bragg sur les résonateurs, et qui permettent d'atteindre des réflectivités de plus de 99.999% [36]. Malgré l'incroyable efficacité de cette technologie, leurs pertes mécaniques et leur poids les mettent en défaut pour les applications en optomécanique. En effet, les hautes performances de tels systèmes sont obtenues grâce à un nombre important de dépôts successifs de couches de diélectrique dont l'épaisseur est de l'ordre du quart de longueur d'onde, une trentaine pouvant être nécessaire. Cette contrainte sur l'épaisseur des miroirs alourdit considérablement les résonateurs dont la réponse mécanique et la fréquence sont ainsi réduites. D'autre part, les matériaux utilisés pour la fabrication de ces miroirs étant bien souvent des diélectriques amorphes, ils introduisent, s'ils ne sont pas placés judicieusement [37], des pertes mécaniques ; là aussi un paramètre clef dans le développement de systèmes optomécaniques performants. Les cristaux photoniques, eux, n'entraînent pas de telles limitations. Comme nous allons le présenter dans ce chapitre, c'est la structuration périodique sub-longueur d'onde de l'indice diélectrique du milieu qui sélectionne certains modes optiques et crée ainsi des miroirs performants. De plus, de tels systèmes restent très performants pour des épaisseurs de

quelques dizaines de nanomètres, permettant d'atteindre des masses très faibles. Un des autres intérêts de cette technique est qu'elle peut être utilisée sur bon nombre de matériaux diélectriques, ce qui permet d'utiliser des matériaux offrant peu de pertes mécaniques [38].

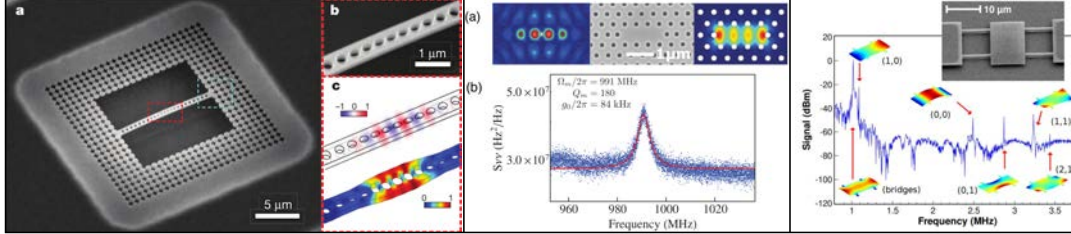


Fig. 2.1 A gauche : Cavité zip, développée par O. Painter, où une modification locale de la géométrie du cristal photonique permet une colocalisation des modes optiques et phononiques, [35]. Au centre : Cavité L3 développée par I. Robert-Philipp et T. Kippenberg utilisant des défauts du cristal photonique pour colocaliser modes optique et mécaniques, [39]. L'adressage de ces premiers types de structures par un faisceau laser est assuré par couplage évanescent. A droite : Membrane structurée comme réflecteur en incidence normale utilisée comme miroir de fond d'une cavité Fabry-Pérot, [40].

Les systèmes développés dans la communauté optomécanique peuvent être regroupés en deux catégories :

- ceux utilisant le cristal photonique pour piéger la lumière autour d'un défaut dans la direction de la périodicité. Le piégeage dans la(les) dimensions transverse(s) est généralement assuré par réflexion totale interne. En outre, de telles structures peuvent également présenter des modes mécaniques confinés lorsque la longueur d'onde mécanique devient comparable à la longueur d'onde optique (pour des fréquences mécaniques de quelques GHz). La Figure 1 présente quelques exemples de structures exploitant le couplage optomécanique entre modes optiques et mécaniques colocalisés.
- la seconde approche, développée pendant cette thèse, utilise les propriétés de diffraction d'une membrane structurée pour réaliser un réflecteur parfait en incidence normale. Le couplage optomécanique a alors lieu entre les modes mécaniques hors plan de la membrane, à des fréquences de quelques MHz, et le mode optique d'une cavité dont la membrane suspendue forme le miroir mobile. Cette configuration diffère notablement de l'usuelle configuration en miroir de Bragg, où la réflexion est assurée suivant l'axe de périodicité. Ici elle est induite dans la direction normale, utilisant un canal de couplage hors plan résultant de l'épaisseur finie du cristal. Elle est illustrée par l'image de droite de la Figure 2.1.

C'est la seconde approche qui a été utilisée pour le développement du nano-résonateur présenté dans ce manuscrit. Ce chapitre est composé de la manière suivante : après un rappel des équations de Maxwell dans un milieu diélectrique homogène isotrope et sans pertes, nous allons, par des arguments de symétrie, déduire un grand nombre de propriétés des solutions de ces équations dans le cas du cristal photonique. Nous montrerons alors par un modèle simple l'origine physique des propriétés de réflexion extraordinaire des membranes à cristaux photoniques. Nous présenterons ensuite le principe

de la méthode d'analyse par le couplage entre ondes planes (RCWA), et confronterons les résultats obtenus par cette méthode aux arguments physiques invoqués précédemment. Nous procéderons ensuite à une discussion sur les différents écarts possibles du comportement en réflexion, comme la taille finie du cristal photonique, ou encore la nature gaussienne du champ incident. Enfin, après avoir présenté le processus de fabrication, nous présenterons les mesures de réflectivité des échantillons réalisés.

2.2 Equations de Maxwell dans un milieu : un problème aux valeurs propres

2.2.1 Equations de Maxwell dans un milieu

Le champ électromagnétique d'une onde optique est décrit dans un milieu quelconque par les équations de Maxwell. Nous supposons dans ce travail que les milieux sont homogènes, isotropes et que les champs sont suffisamment faibles pour négliger les non linéarités optiques. Les modifications des propriétés optiques du matériau traité dans ce chapitre ne seront dues qu'à la structuration de l'indice diélectrique du milieu. En l'absence de charges, de pertes et de courants, et en considérant une dépendance harmonique du champ en fonction du temps, les équations de Maxwell prennent la forme suivante :

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -i\varepsilon_0\varepsilon(\mathbf{r})\omega\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (2.2.4)$$

Où $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ est le champ électrique, $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ le champ magnétique, $\varepsilon(\mathbf{r})$ la permittivité relative du milieu à la position \mathbf{r} , et \mathbf{r} les coordonnées dans le milieu. Combinant les équations 2.2.3 et (2.2.4) nous obtenons :

$$\nabla \times \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (2.2.5)$$

Une fois la forme du champs \mathbf{H} déterminée, le champs électrique nous est donné par :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{i}{\omega\varepsilon_0\varepsilon(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (2.2.6)$$

qui de par sa forme satisfait obligatoirement l'équation 2.2.2.

2.2.2 Problème aux valeurs propres

Les équations de Maxwell étant linéaires, la résolution de l'équation 2.2.5 est équivalente à un problème aux valeurs propres, que nous pouvons réécrire comme :

$$\hat{\Theta}\mathbf{H} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}). \quad (2.2.7)$$

Où $\hat{\Theta}$ est l'opérateur différentiel linéaire défini comme :

$$\hat{\Theta}\mathbf{H}(\mathbf{r}) \triangleq \nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \right). \quad (2.2.8)$$

Nous munissant du produit scalaire :

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle \triangleq \int d^3\mathbf{r} \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{G} \quad (2.2.9)$$

il peut être montré, moyennant certaines hypothèses¹ [34], que $\hat{\Theta}$ est un opérateur hermitien. Ainsi, cet opérateur est diagonalisable, dans une base de vecteurs propres orthonormés. Ces vecteurs propres forment les modes du champ électromagnétique et leurs valeurs propres sont proportionnelles au carré de la pulsation ω comme on le voit sur l'équation 2.2.7. Sous les mêmes hypothèses que précédemment, on peut montrer de plus que Θ est un opérateur défini positif [34], c'est à dire que toutes ses valeurs propres sont strictement positives. Il en découle alors que les modes ont des pulsations ω réelles positives, correspondant à des solutions purement périodiques, sans atténuation au cours du temps. D'une façon générale, ce problème aux valeurs propres faisant intervenir un opérateur aux dérivées partielles, il est très difficile à résoudre sans hypothèses supplémentaires. Toutefois, nous allons voir dans la section suivante que l'analyse des symétries du problème peut grandement simplifier sa résolution.

2.3 Symétrie du cristal photonique

Une situation physique est dite symétrique lorsqu'elle est invariante sous l'action d'un opérateur unitaire \hat{S} . Dans le cas d'un problème aux valeurs propres tel que l'équation 2.2.7, l'invariance se traduit par :

$$[\hat{S}, \hat{\Theta}] = 0. \quad (2.3.1)$$

Ainsi, ces deux opérateurs partagent une base commune de diagonalisation, ce qui permet de classer les vecteurs propres de $\hat{\Theta}$ suivant le sous-espace propre de \hat{S} auquel ils appartiennent.

Comme expliqué dans la partie introductive, les cristaux photoniques sont une alternance périodique de matériaux d'indice diélectrique différents, et ce dans une ou plusieurs directions de l'espace, comme illustrée par la Figure 2.2. Ainsi, la caractéristique première de telles structures est d'être invariante par translation discrète. Nous allons à présent étudier les conséquences de cette invariance sur le spectre de $\hat{\Theta}$.

2.3.1 Invariance par translation discrète : théorème de Bloch-Floquet

Nous allons dans cette section considérer un agencement périodique, de période Λ , de diélectrique dans une seule direction de l'espace, x (voir Figure 2.2 gauche), et considérer dans un premier temps que le problème est invariant suivant les deux

1. La forme des conditions aux limites joue en particulier un rôle important dans ce problème. L'hermiticité de Θ est notamment vérifiée pour des conditions aux limites périodiques ou encore lorsque les champs s'annulent en dehors de la zone d'intégration.



Fig. 2.2 Vue schématique de cristaux photoniques à 1, 2 et 3 dimensions.

autres directions ($\partial_y = \partial_z = 0$). Dans ce cas le champ magnétique ne dépend que de x et sera noté $\mathbf{H}(x)$. L'invariance par translation discrète que présentent les cristaux photoniques étant un cas particulier de l'invariance par translation continue, nous allons dans un premier temps déterminer la forme des solutions pour un problème invariant par translation continue, pour dans un deuxième temps nous restreindre au cas de la translation discrète. Puis déterminer les propriétés remarquables des solutions du problème.

Cas d'une translation quelconque :

Le cas d'une symétrie par translation continue correspond à la propagation de l'onde dans un milieu isotrope homogène et infini. Notons $\hat{T}_{\mathbf{d}}$ l'opérateur associé à la translation suivant le vecteur $\mathbf{d} = d\mathbf{x}$:

$$\hat{T}_{\mathbf{d}}\varepsilon(x) = \varepsilon(x + d). \quad (2.3.2)$$

Le problème est invariant par translation continue si et seulement si il est invariant par toute translation $\hat{T}_{\mathbf{d}}$, quel que soit le vecteur \mathbf{d} considéré :

$$[\hat{T}_{\mathbf{d}}, \hat{\Theta}] = 0, \forall d \in \mathbb{R}. \quad (2.3.3)$$

Soit $\mathbf{h}(x)$ une fonction vecteur propre de $\hat{\Theta}$, celle-ci est, d'après 2.3.3, également fonction propre de tous les $\hat{T}_{\mathbf{d}}$ et vérifie donc :

$$\hat{T}_{\mathbf{d}}\mathbf{h}(x) = \mathbf{h}(x + d) = \lambda(d)\mathbf{h}(x), \quad (2.3.4)$$

où $\lambda(d)$ est la valeur propre associée à la fonction $\mathbf{h}(x)$ pour une translation d'une quantité d . On peut alors exprimer la fonction \mathbf{h} uniquement grâce à sa valeur en 0, $\mathbf{h}(0) = \mathbf{H}_0$. En effet

$$\mathbf{h}(x) = \lambda(x)\mathbf{h}(0) \quad (2.3.5)$$

$$= \lambda(x)\mathbf{H}_0, \quad (2.3.6)$$

et de plus

$$\mathbf{h}(x + y) = \lambda(x)\mathbf{h}(y) = \lambda(x)\lambda(y)\mathbf{H}_0 \quad (2.3.7)$$

et

$$\mathbf{h}(x + y) = \lambda(x + y)\mathbf{H}_0 \quad (2.3.8)$$

d'où

$$\lambda(x+y) = \lambda(x)\lambda(y). \quad (2.3.9)$$

Donc la seule solution continue et dérivable est $\lambda(x) = e^{ax}$ avec a une constante. Ainsi les vecteurs propres communs à tous les opérateurs de translations $\hat{T}_{\mathbf{d}}$ sont de la forme $\mathbf{H}_0 e^{ax}$ et leur valeurs propres associées e^{ad} . L'espace étant infini, les seules solutions physiques du problème sont pour a imaginaire pure. Nous venons de voir que les vecteurs propres communs des $\hat{T}_{\mathbf{d}}$ sont des fonctions de la forme $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$, ces solutions ne sont autres que les ondes planes, solutions des équations de Maxwell dans un milieu uniforme sans source ni courant. Reprenant la forme générale des solutions du problème et en les injectant dans l'équation 2.2.5, nous arrivons aux valeurs propres $(\omega/c)^2 = |\mathbf{k}|^2/\varepsilon$, qui nous donne la relation de dispersion linéaire des ondes planes :

$$\|\mathbf{k}\| = \sqrt{\varepsilon} \frac{\omega}{c} \quad (2.3.10)$$

où ω est la pulsation et c la vitesse de la lumière dans le milieu.

Cas d'une translation discrète

Retournons au problème illustré Figure 2.2 gauche, où l'invariance par translation est discrète et correspond à la périodicité de l'agencement des diélectriques. Nous appellerons, dans la suite de ce manuscrit, maille élémentaire la cellule de diélectrique correspondant à une période. Soit $\hat{T}_{\Lambda\mathbf{x}}$ l'opérateur de translation d'une période Λ suivant le vecteur \mathbf{x} , nous avons donc $\hat{T}_{\Lambda\mathbf{x}}\varepsilon(x) = \varepsilon(x + \Lambda) = \varepsilon(x)$. Une base de vecteurs propres de l'opérateur est constituée par les ondes planes. En effet :

$$\hat{T}_{\Lambda} e^{ik_x x} = e^{ik_x(x+\Lambda)} = e^{ik_x \Lambda} e^{ik_x x}. \quad (2.3.11)$$

On voit alors que la valeur propre $e^{ik_x \Lambda}$ est dégénérée puisque $B_{k_x} = \{e^{i(k_x + 2\pi n/\Lambda)x}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sont tous des vecteurs propres associés. Toute solution du problème (2.2.7) appartient nécessairement à un sous-espace propre de l'opérateur T_{Λ} , et peut se décomposer sur la base B_{k_x} . La forme générale de ces solutions est donc :

$$\mathbf{H}_{k_x}(x) = \sum_m \mathbf{c}_{k_x, m} e^{i(k_x + mb)x} \quad (2.3.12)$$

$$= e^{ik_x x} \sum_m \mathbf{c}_{k_x, m} e^{imbx} \quad (2.3.13)$$

$$= e^{ik_x x} \mathbf{u}_{k_x}(x), \quad (2.3.14)$$

avec $b = 2\pi/\Lambda$. La fonction \mathbf{u}_{k_x} , appelée fonction de Bloch, étant définie par la série de Fourier de l'équation 2.3.13, elle est par construction Λ -périodique selon x . Ainsi la périodicité de l'espace réel mène à une forme particulière pour les états propres de $\hat{\Theta}$ (i.e. : les états dont la variation temporelle est harmonique) : ils peuvent s'écrire sous la forme du produit d'une onde plane avec une fonction Λ -périodique en \mathbf{x} . Ce résultat très général est communément appelé théorème de Floquet en mécanique, ou encore théorème de Bloch en physique du solide. On retrouve en effet un résultat parfaitement analogue en mécanique quantique sur la forme des fonctions d'ondes décrivant le mouvement des électrons dans le potentiel périodique créé par les noyaux dans un cristal.

Les bandes photoniques :

Maintenant que la forme des solutions des équations de Maxwell est établie, nous pouvons chercher les valeurs propres associées en les injectant dans l'équation 2.2.7 :

$$\hat{\Theta}\mathbf{H}_{\mathbf{k}} = (\omega(\mathbf{k})/c)^2\mathbf{H}_{\mathbf{k}} \quad (2.3.15)$$

$$(i\mathbf{k} + \nabla) \times \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})}(i\mathbf{k} + \nabla) \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = (\omega(\mathbf{k})/c)^2\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (2.3.16)$$

$$\hat{\Theta}_{\mathbf{k}}\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = (\omega(\mathbf{k})/c)^2\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (2.3.17)$$

Où nous définissons l'opérateur $\hat{\Theta}_{\mathbf{k}}$ comme l'opérateur hermitien :

$$\hat{\Theta}_{\mathbf{k}} \triangleq (i\mathbf{k} + \nabla) \times \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})}(i\mathbf{k} + \nabla) \times . \quad (2.3.18)$$

L'équation 2.3.17, à résoudre sur une maille élémentaire du réseau réel, combinée aux conditions limites données par la relation de périodicité $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{\Lambda})$ permet donc de déterminer les profils des modes.

La détermination des relations de dispersion reste un problème technique nécessitant l'emploi de méthodes de calcul numérique puissantes, dont nous donnerons un bref aperçu section 2.4.3 et 2.5.1.

Diagramme de bande :

De la même manière que la quantification du champ électromagnétique dans une boîte, le problème aux valeurs propres défini par l'équation 2.3.18 dans la maille élémentaire du réseau réel donne lieu à un spectre discret. Ainsi, un vecteur d'onde k_x donne lieu à une infinité dénombrable, par un indice n , de modes optiques. De plus le paramètre k étant introduit de manière continue dans $\hat{\Theta}_k$ nous pouvons nous attendre à ce que l'énergie de chaque bande varie de manière continue avec k . Il existe donc des familles de fonctions $\omega_n(\mathbf{k})$, indexées par ordre croissant en fréquence, qui sont appelées bandes du cristal photonique. Un exemple de telles bandes est donné Figure 2.3, pour des valeurs de k variant de $-3\pi/a$ à $2\pi/a$. Les bandes présentent une variation périodique de période $2\pi/\Lambda$: en effet l'équation aux valeurs propres 2.3.11 reste inchangée pour $k_x \rightarrow k_x + 2\pi/\Lambda$ (notons toutefois que cette transformation se traduit sur les fonctions de Bloch par : $\mathbf{u}_{n,k_x}(x) \rightarrow \mathbf{u}_{n,k_x+2\pi/\Lambda}(x)e^{-2i\pi/\Lambda}$). La zone dans l'espace réciproque de $[-\pi/\Lambda, \pi/\Lambda]$, non grisée sur la Figure 2.3, est appelée zone de Brillouin. Son étude suffit à déterminer l'ensemble des solutions du problème aux valeurs propres.

En outre, il est généralement possible d'identifier d'autres symétries du problème. Par exemple, la symétrie par renversement temporel [41] permet de trouver $H_{k_x,n} = H_{-k_x,n}^*$. Cette symétrie impose en outre : $\omega_n(k_x) = \omega_n(-k_x)$. On peut ainsi se limiter à la détermination des vecteurs propres sur l'intervalle $[0, \pi/\Lambda]$. D'une façon générale, la zone minimale de l'espace réciproque à partir de laquelle on peut déduire l'ensemble des solutions du problème aux valeurs propres est appelée zone de Brillouin irréductible.

Une dernière propriété importante apparaît sur la Figure 2.3 (zone rosée) ; il existe des fréquences pour lesquelles il n'y a pas de solution, la lumière ne peut donc pas se propager dans le milieu à ces fréquences. Ces bandes interdites sont en particulier utilisées pour la fabrication de miroirs de Bragg. En effet, lorsqu'une onde plane incidente

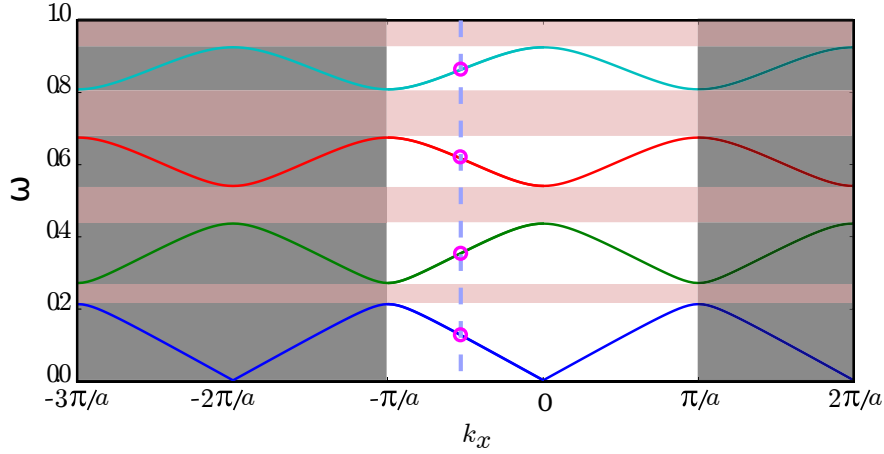


Fig. 2.3 Relation de dispersion

arrive sur une telle structure, si son énergie se trouve dans une des bandes interdites du cristal photonique, elle ne pourra pas s'y propager et, par conservation de l'énergie, est donc réfléchi.

Généralisation aux cristaux de dimension supérieure

Il est possible de généraliser l'étude précédente au cas où la modulation périodique de l'indice se fait dans plusieurs directions de l'espace. On supposera l'indice diélectrique du milieu invariant suivant la transformation $\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r} + \mathbf{R})$ avec \mathbf{R} une combinaison linéaire de vecteurs de base du réseau réel : $\mathbf{R} = l_1 \mathbf{\Lambda}_1 + l_2 \mathbf{\Lambda}_2 + l_3 \mathbf{\Lambda}_3$, avec l_1 , l_2 et l_3 des entiers quelconques. De la même manière les propriétés d'invariance par translation permettent via le théorème de Bloch de déterminer la forme des solutions, qui s'écrivent de manière générale :

$$\mathbf{H}_n(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathbf{u}_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \quad (2.3.19)$$

Avec toujours pour valeur propre $(\omega_n(\mathbf{k})/c)^2$, et où $\mathbf{u}_{n,\mathbf{k}}$ est la fonction périodique satisfaisant l'équation 2.3.17. Le réseau réciproque associé au cristal est défini comme la famille des $\{\mathbf{\Gamma}_i\}$ reliée aux vecteurs du réseau réel par la relation :

$$\mathbf{\Lambda}_i \cdot \mathbf{\Gamma}_j = 2\pi \delta_{ij}, \quad (2.3.20)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Une manière de les définir pour une maille élémentaire réelle quelconque définie par ses vecteurs de base $\{\mathbf{\Lambda}_i\}$ est :

$$\mathbf{\Gamma}_i = 2\pi \frac{\mathbf{\Lambda}_j \times \mathbf{\Lambda}_l}{\mathbf{\Lambda}_i \cdot (\mathbf{\Lambda}_j \times \mathbf{\Lambda}_l)} \quad (2.3.21)$$

C'est ce réseau qui délimite la première zone de Brillouin, dans laquelle il est suffisant de résoudre le problème aux valeurs propres défini par (2.3.18). En effet, comme précédemment, le diagramme de bandes reste inchangé pour $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} + \mathbf{G}$, où $\mathbf{G} = \sum_i l_i \mathbf{\Gamma}_i$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers de vecteurs du réseau réciproque.

La Figure 2.4 représente, à gauche, un cristal photonique à deux dimensions de maille carrée dans l'espace réel. À droite, l'espace réciproque associé, limité à la zone de Brillouin, où sont représentés les points Γ , X et M correspondant respectivement à

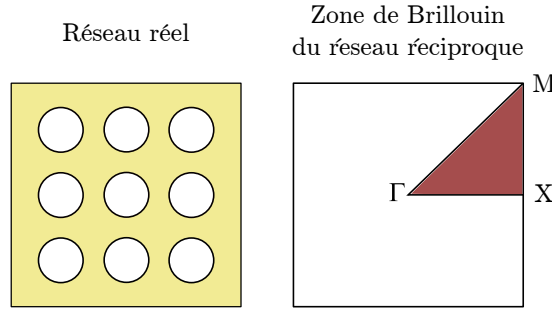


Fig. 2.4 Gauche : représentation d'un cristal photonique à deux dimensions à maille carrée sur quelques périodes. Droite : Zone de Brillouin d'une maille carrée, centrée à l'origine (Γ). Le triangle marron représente la zone irréductible, avec comme points particuliers le centre, le coin et la face, connus sous les noms de points Γ , M et X .

une impulsion nulle, dans la direction du premier axe de périodicité, et oblique. Dans le cas d'une structuration multidimensionnelle, le spectre du système ne forme plus des bandes mais des nappes (voir éq. 2.3.19). Cependant, pour l'étude des propriétés de conduction de ces structures, les fréquences propres $\omega_n(\mathbf{k})$ sont en général représentées pour l'impulsion parcourant la périphérie de la zone irréductible (zone marron Figure 2.4), ce qui donne donc lieu à un simple graphique à deux dimensions. En effet, il est admis que la plupart des propriétés intéressantes des cristaux photoniques (par exemple les extrema en fréquence des bandes photoniques) se situent sur ces points de haute symétrie [34].

Longtemps, la communauté des cristaux photoniques a essayé de développer des cristaux à 3 dimensions présentant une bande interdite empêchant la propagation de la lumière dans les trois directions de l'espace. De telles structures pourraient par exemple être utilisées pour inhiber totalement l'émission spontanée d'un atome et le maintenir ainsi indéfiniment dans un état excité. Un des premiers réalisés fut le Yablonite basé sur une maille cubique centrée inspirée de celle du diamant et qui opérait aux longueurs d'onde centimétriques [42]. Le cristal est obtenu en perçant, selon des angles bien précis, des réseaux de trous traversants dans un bloc de matériau diélectrique.

Cependant, pour des longueurs d'onde optique ou dans le proche infrarouge, de telles structures sont difficilement réalisables en raison des contraintes technologiques. On peut noter toutefois les dernières avancées en micro-fabrication qui ont permis de réaliser des nano-lasers à fort taux d'émission grâce à un cristal photonique à trois dimensions de type pile de bois [43].

En raison de la difficulté à mettre en oeuvre un cristal photonique à trois dimensions qui permettrait de confiner la lumière dans les trois directions de l'espace, la communauté s'est tournée vers des techniques hybrides, où le confinement latéral est assuré par des cristaux photoniques à bandes interdites et le confinement vertical est assuré par réflexion totale interne à l'intérieur d'une fine tranche de matériau diélectrique [35, 39, 44, 45]. Ces cristaux photoniques membranaires font l'objet d'un nombre considérable d'études théoriques et expérimentales et ils sont à la base des expériences d'optomécanique développées durant ma thèse.

2.3.2 Cas d'un cristal membranaire

Nous avons jusqu'ici étudié des systèmes invariants selon les directions autres que celles de la périodicité. Dans cette section, nous allons nous intéresser au cas d'un cristal photonique membranaire d'épaisseur z_t , plongé dans l'air, situation illustrée Figure 2.5. Pour plus de simplicité, nous allons revenir au cas où la structuration du

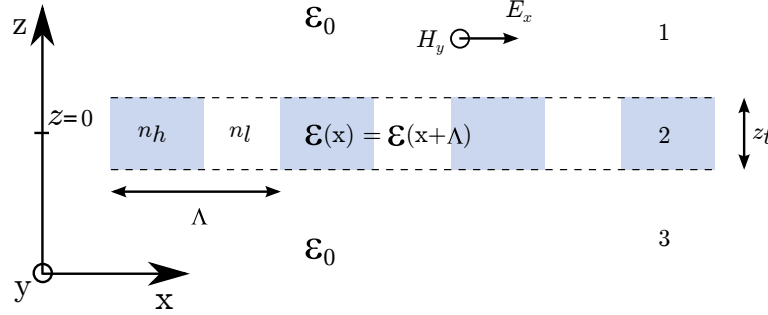


Fig. 2.5 Vue schématique du réseau de diffraction à une dimension en polarisation TM.

diélectrique est selon la direction \mathbf{x} , et invariante suivant \mathbf{y} . Nous supposons en outre la propagation gelée suivant l'axe y ($\partial d_y = 0$). Le problème n'étant plus invariant par translation continue selon \mathbf{z} , les champs dans les trois régions de l'espace sont donc différents. Il nous faut alors les déterminer indépendamment en considérant le type d'ondes qui peuvent se propager dans chaque domaine. La solution au problème global est ensuite déterminée en construisant la bonne combinaison de ces ondes satisfaisant les conditions aux interfaces. Nous allons donc dans un premier temps déterminer la forme des solutions des équations de Maxwell dans les milieux 1 et 3, voir Figure 2.5. Dans un deuxième temps, nous allons considérer les conditions de continuité aux interfaces pour déterminer la forme des solutions générales du problème.

Modes propres dans les zones homogènes

Dans le milieu homogène, les solutions sont les ondes planes de forme générale $\mathbf{H}_0 e^{i(k_x x + k_z z)}$, où nous avons séparé le vecteur d'impulsion en sa composante suivant \mathbf{z} et celle dans la direction de la périodicité \mathbf{x} . Comme le système global est lui aussi invariant par la translation \hat{T}_Λ , le champ dans le milieu uniforme vérifie le théorème de Bloch, et peut se décomposer comme :

$$\mathbf{H}_{k_x} = \sum_n \mathbf{u}_{k_{x0},n}(x, z) e^{ik_{x0}x} \quad (2.3.22)$$

$$= \sum_n \mathbf{H}_n e^{i(k_{x,n}x + k_{z,n}z)}, \quad (2.3.23)$$

avec $k_{x,n} = k_{x0} + n\Gamma_1$, où $\Gamma_1 = 2\pi/\Lambda$ est la norme du vecteur du réseau réciproque du cristal photonique. Afin de vérifier la relation de dispersion des ondes planes, la composante du vecteur d'onde $k_{z,n}$ doit vérifier :

$$k_{z,n} = \pm [(\omega/c)^2 - k_{x,n}^2]^{1/2}. \quad (2.3.24)$$

De l'équation 2.3.24, deux types de solutions apparaissent, celles pour lesquelles la composante $k_{z,n}$ du vecteur d'onde est réelle ($(\omega/c)^2 > k_{x,n}^2$) : ces ondes propageantes transportent de l'énergie le long de cet axe. Au contraire, lorsque $k_{z,n}$ est imaginaire ($(\omega/c)^2 < k_{x,n}^2$), l'onde est dite évanescence : elle s'amortit exponentiellement avec la coordonnée z et elle ne transporte pas d'énergie suivant cette direction. Dans le diagramme de dispersion ω/k_{x0} , les droites d'équation $\omega/c = \pm k_{x,n}$ séparant les domaines d'existence des deux types de solutions sont appelées lignes de lumière (ou cônes de lumière dans le cas à deux dimensions). La Figure 2.6 représente les pre-

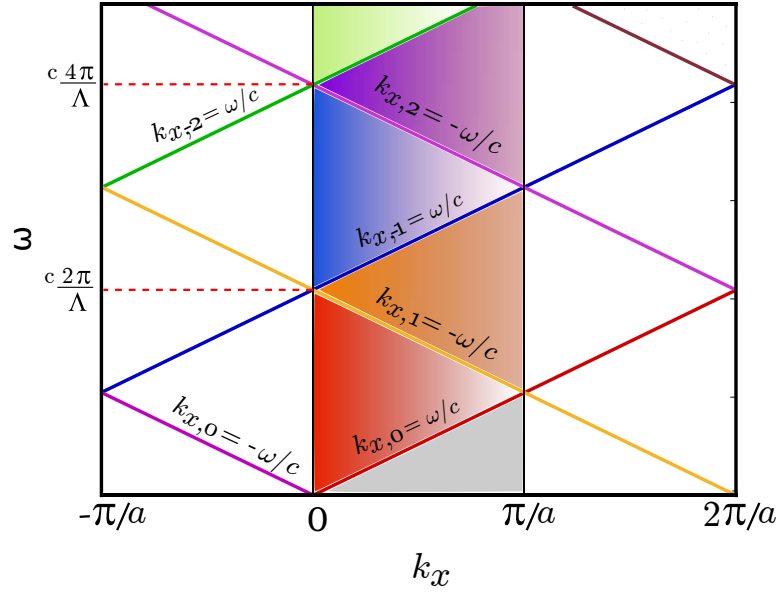


Fig. 2.6 Représentation du cône de lumière pour chaque $k_{x,n}$.

mières lignes de lumière pour des valeurs de k_{x0} variant de $-\pi/a$ à $2\pi/a$. La zone grise correspond au lieu de la zone de Brillouin irréductible où toutes les ondes sont évanescences puisque $\omega < ck_{x,0}$. Pour les fréquences comprises entre les droites d'équation $\omega > ck_{x,0}$ et $\omega < ck_{x,1}$ (zone rouge), seul le vecteur d'onde $k_{x,0}$ est réel : une seule onde peut donc se propager dans le milieu. Puis, pour des fréquences vérifiant l'inégalité $ck_{x,1} < \omega < ck_{x,-1}$ (zone orange) un deuxième mode du champ peut se propager dans le milieu, et ainsi de suite : chaque fois que la fréquence croise une des lignes de lumière associée à un des vecteurs d'ondes $k_{x,n}$, une nouvelle onde peut se propager dans le milieu.

Conditions aux limites des ondes sortantes

La situation n'étant plus invariante suivant \mathbf{z} , pour trouver la solution générale au problème nous allons devoir faire coïncider les champs déterminés dans les zones 1 à 3 grâce aux conditions de passage aux interfaces. Par définition, le problème aux valeurs propres consiste à trouver les champs qui ont une dépendance harmonique en l'absence de tous champs incidents depuis $z = \pm\infty$. Ainsi, dans les zones 1 et 3, nous nous restreindrons aux modes dont la direction de propagation a lieu du cristal photonique

(zone 2) vers l'extérieur. Ainsi, les modes $\{\mathbf{H}_{k_x,n}^+\}$ acceptables dans la zone 3 doivent vérifier $\Re[k_{z,n}] > 0$ (transport d'énergie vers les z croissants) ou bien $\Im[k_{z,n}] > 0$ (pas de divergence du champ en $z \rightarrow \infty$). Au contraire, dans la zone 1, les solutions ne peuvent utiliser que les modes $\{\mathbf{H}_{k_x,n}^-\}$ vérifiant $\Re[k_{z,n}] < 0$ ou $\Im[k_{z,n}] < 0$.

Généralement, un tel problème ne peut ni se ramener à une situation avec des conditions aux limites périodiques, ni à un problème où les champs s'annulent à l'extérieur d'une zone d'intégration. En effet, les composantes k_z doivent être opposées dans les zones 1 et 3 et lorsqu'au moins un mode y est propageant (notons n son indice), on n'a pas $\mathbf{H}_{k_x,n} \xrightarrow{z \rightarrow \pm\infty} 0$. Il en découle que l'opérateur Θ n'est pas hermitien et possède des valeurs propres complexes. Ce type de problème, où un mode confiné est couplé à des modes propageants dans l'espace libre est analogue à celui d'une cavité Fabry-Perot dont au moins l'un des miroirs possède une réflectivité $r < 1$. Les fréquences complexes associées, correspondant à un temps de vie fini, traduisent la fuite d'énergie du mode confiné vers l'extérieur via les modes du continuum. De telles "résonances guidées", ou encore "leaky modes", apparaissent donc au-dessus du premier cône de lumière.

De telles pertes d'énergie sont généralement considérées comme un effet indésirable, notamment lorsque le cristal photonique membranaire est utilisé pour confiner l'énergie, comme dans des guides d'ondes ou des cavités planaires [46]. Dans ce cas, on s'efforce le plus souvent de se placer sous le cône de lumière pour s'assurer un piégeage total dans la direction z . Un tel confinement peut alors s'interpréter comme un phénomène de réflexion totale interne. Dans le cas qui nous intéresse, au contraire, c'est le couplage entre les résonances guidées et les modes du continuum qui donne lieu au phénomène de réflexion parfaite pour un faisceau incident depuis $z > 0$.

Différentes méthodes numériques existent pour trouver la pulsation $\Re[\omega]$, le facteur de qualité $Q = \Re[\omega]/\Im[\omega]$ et le champ $\mathbf{H}_{k_x,n}(x, z)$ associé à ces résonances guidées. Nous en verrons un exemple dans la section 2.4.3. Avant cela, nous allons tout d'abord exploiter une dernière symétrie du cristal membranaire dans le paragraphe suivant, avant de démontrer par un modèle phénoménologique comment de telles résonances guidées donnent lieu à une réflexion extraordinaire pour un faisceau incident depuis l'espace libre.

Symétrie miroir du cristal membranaire et parité des résonances guidées

Le système représenté Figure 2.5 possède une symétrie que nous n'avons pas encore exploitée : la symétrie miroir définie par le plan médian du cristal dans sa direction de périodicité. Soit \hat{M}_r l'opérateur associé à cette symétrie, l'action de \hat{M}_r sur les champs s'écrit :

$$\hat{M}_r[\mathbf{E}(\mathbf{r})] = M_r(\mathbf{E}(M_r(\mathbf{r}))) = \begin{vmatrix} E_x(x, y, -z) \\ E_y(x, y, -z) \\ -E_z(x, y, -z) \end{vmatrix} \quad (2.3.25)$$

et

$$\hat{M}_r[\mathbf{H}(\mathbf{r})] = -M_r(\mathbf{H}(M_r(\mathbf{r}))) = - \begin{vmatrix} H_x(x, y, -z) \\ H_y(x, y, -z) \\ -H_z(x, y, -z) \end{vmatrix} \quad (2.3.26)$$

Le signe $-$ dans la seconde équation est lié au fait que le champ magnétique est un pseudo-vecteur, dont l'orientation change par l'application d'une isométrie indirecte telle qu'une symétrie plane [41]. En outre, comme $\hat{M}_r^2 = Id$, les valeurs propres de \hat{M}_r sont $+1$ et -1 . On peut ainsi classer les modes propres de $\hat{\Theta}$ suivant le sous-espace propre de \hat{M}_r auquel ils appartiennent. Les modes associés à la valeur propre $+1$ (respectivement -1), sont dits pairs (resp. impaires). D'après les équations 2.3.25 et 2.3.26, les composantes E_x , E_y et H_z sont paires (resp. impaires) tandis que les composantes E_z , H_x , H_y sont impaires (resp. paires). On note en outre que les champs $\{\mathbf{H}_{k_x,n}^+\}$ dans la zone 3 sont les symétriques des champs $\{\mathbf{H}_{k_x,n}^-\}$ dans la zone 1. Ainsi, les modes pairs rayonnent des champs en phase dans les zones 1 et 3 tandis que les modes impairs rayonnent des champs en opposition de phase.

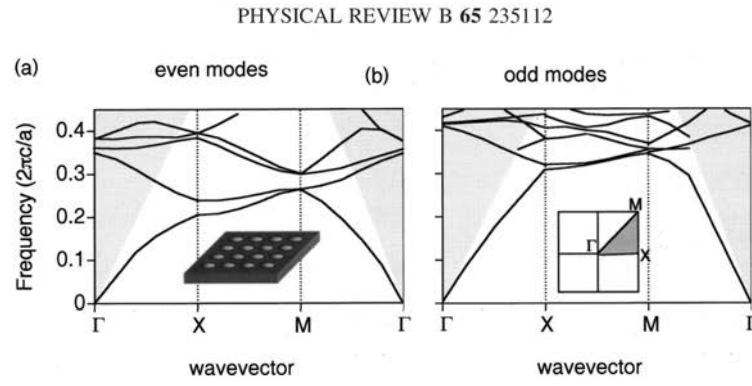


Fig. 2.7 Diagramme de bandes simulé pour un cristal photonique membranaire de maille carrée Λ avec des trous de rayon 0.2Λ et une épaisseur de 0.5Λ par la méthode RCWA, extrait du travail de S. Fan dans [47].

La Figure 2.7, prise de [47], est une représentation typique du diagramme de bande d'un cristal photonique membranaire. Les parties grisées, au dessus du cône de lumière, correspondent aux zones où l'on observe des résonances guidées (seule la partie réelle de ω est représentée dans le diagramme). Chacun des deux diagrammes correspond à l'une des deux familles définies par la symétrie miroir par rapport au plan médian du cristal. Dans la section suivante, nous allons utiliser les résultats obtenus dans cette section grâce à l'analyse des symétries du cristal photonique membranaire pour comprendre le fonctionnement du réflecteur en incidence normale.

2.4 Cristaux photoniques : vers un réflecteur en incidence normale

2.4.1 Régime spéculaire

Nous avons vu dans la partie précédente que plusieurs modes du cristal photonique membranaire rayonnaient dans des modes propageants du continuum dans les zones de l'espace libre au-dessus et en-dessous de la membrane. Comme nous le verrons par la suite, c'est le couplage bidirectionnel entre ces modes propageants et les résonances

guidées localisées dans la membrane qui donne lieu aux propriétés de réflexion extraordinaire. Ainsi, une onde incidente avec une composante d'impulsion transverse k_{x0} et une pulsation ω peut exciter l'une des résonances guidées avec la même composante k_{x0} avant d'interférer avec l'onde rayonnée par ce mode fuyant dans le continuum. De l'analyse des symétries menée dans la partie précédente, on peut déjà tirer une condition nécessaire au bon fonctionnement du réflecteur : afin que l'énergie apportée par l'onde incidente ne soit pas perdue dans les modes diffractés d'ordre supérieur ($k_{x,n} = k_{x0} + 2n\pi/a$), il est nécessaire de s'assurer que ces modes, pour $n \neq 0$, sont tous de nature évanescente dans les milieux 1 et 3.

Cette condition impose que ω et k_{x0} se trouvent dans la zone rouge du diagramme de dispersion (Figure 2.6), soit ² :

$$\omega < 2\pi c/\Lambda - c|k_{x0}|. \quad (2.4.1)$$

Dans ces conditions, on dit que le cristal photonique fonctionne en régime de réflexion spéculaire : une onde plane incidente sur le cristal photonique donne lieu, loin de la membrane, à des ondes réfléchies et transmises uniques, dont les directions de propagation vérifient les lois de Snell-Descartes.

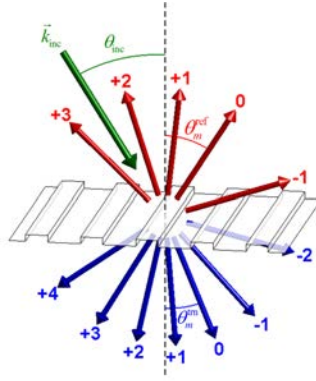


Fig. 2.8 Vue schématique d'une onde incidente sur un réseau diffractant et des différents ordres diffractés en réflexion et en transmission.

Cette condition peut aussi se retrouver en écrivant les angles des différents faisceaux diffractés par un réseau de période Λ (voir Figure 2.8) :

$$\sin(\theta_m^{trans}) = \sin(\theta_{inc}) - m \frac{\lambda}{\Lambda}. \quad (2.4.2)$$

Le régime de réflexion spéculaire correspond au cas où la relation ne peut être vérifiée que pour l'ordre 0 :

$$|\sin(\theta_{inc}) \pm \lambda/\Lambda| > 1. \quad (2.4.3)$$

Pour un réflecteur en incidence normale, les conditions (2.4.1 et 2.4.3) donnent de façon équivalente :

$$\Lambda < \lambda, \quad (2.4.4)$$

2. L'inégalité $ck_{x0} < \omega$ est automatiquement vérifiée si l'onde incidente est de nature propageante.

où $\lambda = 2\pi c/\omega$ est la longueur d'onde dans le vide. Notons en outre que, dans ce cas, seules les résonances guidées au point Γ de la zone de Brillouin jouent un rôle dans le problème. Toutefois, ceci n'est strictement vrai que lorsque le faisceau incident peut être décrit par une onde plane. Du fait de sa divergence angulaire, un faisceau gaussien de largeur finie explore quant à lui des zones voisines de $k_x = 0$ dans le diagramme de dispersion. Nous étudierons ces effets dans la section 2.5.2.

2.4.2 Approche du comportement par la théorie des modes couplés

Avant de passer à la résolution exacte du problème pour une onde plane incidente au paragraphe suivant, nous allons présenter ici un modèle phénoménologique, tiré de la référence [48], permettant d'expliquer les principales caractéristiques des spectres de réflexion et de transmission des réflecteurs à cristaux photoniques membranaires. Dans ce modèle, on considère le cristal membranaire comme un résonateur ponctuel supportant des modes de Bloch au sein d'une membrane plongée dans un milieu environnant.

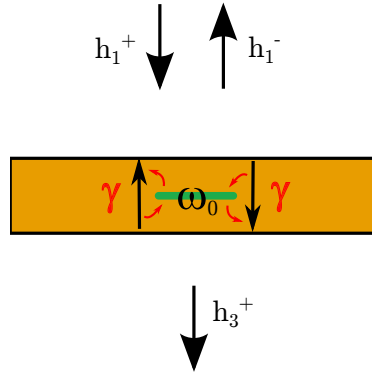


Fig. 2.9 Représentation schématique de la membrane à cristal photonique, décomposée comme un milieu diélectrique supportant un résonateur ponctuel, inspirée de la référence [48].

On note a l'amplitude complexe associée à la résonance guidée, dont la pulsation de résonance est notée ω_0 et l'amortissement γ . D'après l'analyse précédente, dans le régime spéculaire, le mode n'est couplé qu'à trois ondes propageantes : l'onde incidente, notée h_1^+ , qui met le mode en oscillations forcées à la pulsation ω , et les ondes réfléchie et transmise h_1^- et h_3^+ qui représentent des canaux de perte pour le mode. L'essentiel de la physique du problème est alors capturée par l'équation d'évolution temporelle :

$$\frac{da}{dt} = (j\omega_0 - \gamma)a + \sqrt{\gamma}h_1^+. \quad (2.4.5)$$

Cette équation se résout aisément dans l'espace de Fourier :

$$a(\omega) = \frac{\sqrt{\gamma}}{(j(\omega_0 - \omega) + \gamma)} gh_1^+(\omega). \quad (2.4.6)$$

En outre, on suppose que les ondes h_1^\pm et h_3^\pm sont couplées entre elles indépendamment

de la résonance guidée par une matrice de diffusion S :

$$\begin{pmatrix} h_1^- \\ h_3^+ \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} h_1^+ \\ h_3^- \end{pmatrix}, \quad (2.4.7)$$

avec

$$S = \begin{pmatrix} t_d & r_d \\ r_d & t_d \end{pmatrix}. \quad (2.4.8)$$

Dans l'expression 2.4.8, nous avons supposé par la symétrie du problème que les coefficients de transmission et de réflexion directs t_d , r_d sont identiques aux coefficients conjugués \bar{t}_d et \bar{r}_d . En pratique, le processus de diffusion direct décrit par S correspond à l'effet Fabry-Pérot de la lumière entre les deux faces de la membrane diélectrique. Comme les coefficients de diffusion directe r_d et t_d dépendent peu de la pulsation ω par rapport à la réponse de la résonance guidée, nous supposons qu'ils peuvent être pris constants au voisinage de ω_0 . De plus, d'après les résultats de la section 2.3.2, le couplage de la résonance guidée aux modes h_1^- et h_3^+ peut être soit symétrique soit antisymétrique :

$$h_1^- = r_d h_1^+ + \sqrt{\gamma} f a \quad (2.4.9)$$

$$h_3^+ = t_d h_1^+ \pm \sqrt{\gamma} f a \quad (2.4.10)$$

Le coefficient f est a priori quelconque, et le signe plus ou moins dépend de la parité de la résonance guidée. Des expressions ci-dessus, nous tirons le coefficient de réflexion r et de transmission t du système global au voisinage d'une résonance guidée :

$$t = t_d + f \frac{\gamma}{i(\omega - \omega_0) + \gamma} \quad (2.4.11)$$

et

$$r = r_d \pm f \frac{\gamma}{i(\omega - \omega_0) + \gamma}. \quad (2.4.12)$$

Finalement, la conservation de l'énergie entre les ondes entrantes et les ondes sortantes permet de contraindre f :

$$\begin{aligned} |r|^2 + |t|^2 &= |r_d|^2 + |t_d|^2 + \frac{2\gamma^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} [|f|^2 + \Re(r_d^2 \pm t_d^2) f^*] \\ &= 1. \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

Comme la matrice S du processus de diffusion direct doit être unitaire ($S^\dagger S = Id$), nous avons :

$$|r_d|^2 + |t_d|^2 = 1 \quad (2.4.14)$$

$$r_d^* t_d + r_d t_d^* = 0. \quad (2.4.15)$$

Ainsi, la seule solution permettant de satisfaire 2.4.13 est :

$$f = -(r_d \pm t_d) \quad (2.4.16)$$

En outre, d'après 2.4.15, nous avons $|f| = 1$. L'évolution des coefficients r et t dans le plan complexe en fonction de $\Delta = (\omega - \omega_0)\gamma$ est représentée pour une valeur

quelconque de r_d et t_d (vérifiant l'unitarité de S) sur la Figure 2.10 a. La Figure 2.10 b montre l'amplitude du coefficient de réflexion pour différentes valeurs de r_d . Suivant la valeur de r_d , le pic passe continûment d'une forme dispersive à une forme lorentzienne. En outre, quelle que soit la valeur de r_d , la réflectivité passe par un maximum de module 1 ($r = r_d \mp t_d$) pour une certaine valeur de Δ . La forme de ces spectres de réflectivité est typique d'une résonance de Fano, où un premier phénomène physique de spectre discret interfère avec un second dont le spectre est continu.

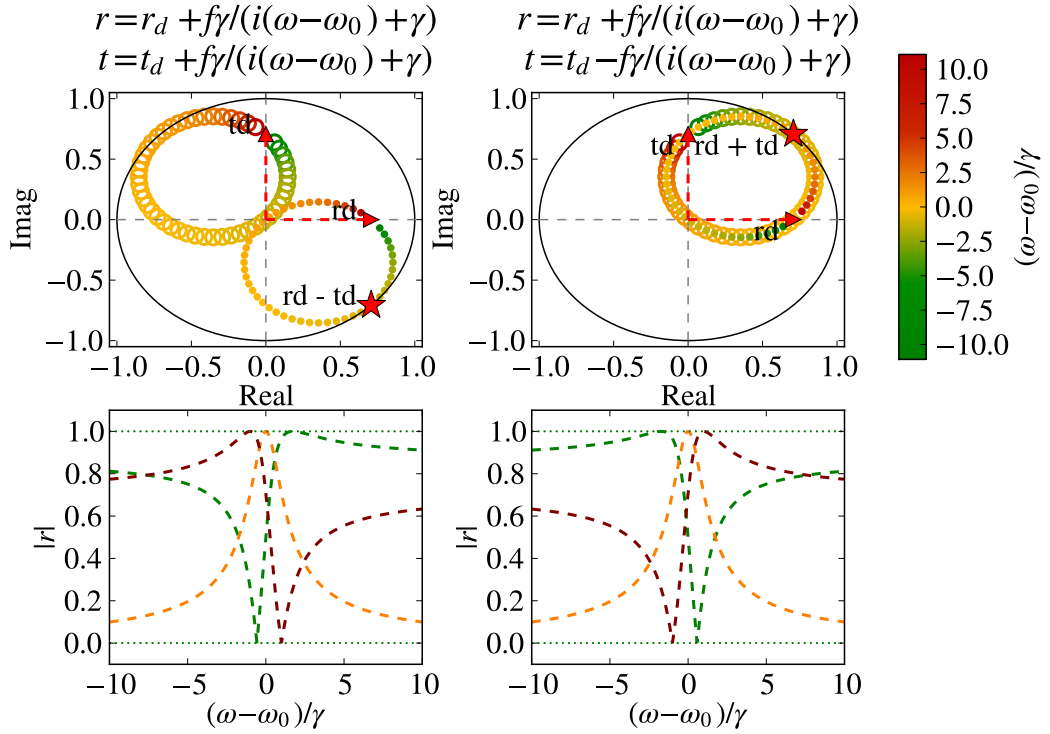


Fig. 2.10 Haut : Paramétrisation des coefficients complexes de réflexion et de transmission r et t (respectivement les points et les anneaux) donnés par les équations 2.4.12 et 2.4.11 en fonction du paramètre $\Delta = (\omega - \omega_0)/\gamma$. Avec t_d et r_d qui vérifient les conditions données par 2.4.15, pour le cas du mode pair à gauche et du mode impair à droite. Ces courbes paramétriques sont tracées pour des valeurs de r_d et t_d valant respectivement $1/\sqrt{2}$ et $1/\sqrt{2}$ (flèches rouges). Bas : Module du coefficient de réflexion pour des valeurs de r_d valant $1/2$ (courbes vertes), 0 (courbe jaune) et $\sqrt{3}/2$ (courbe rouge).

La Figure 2.11, tirée de [47], est un exemple type de réponse spectrale d'un cristal photonique membranaire : on peut y observer la forme des résonances dont la réponse est superposée à celle de la membrane non structurée. On peut y voir les différentes forme des résonances de Fano décrites précédemment (paire et impaire). Ainsi, le modèle des modes couplés permet de bien décrire qualitativement la forme des résonances observées.

Cependant, si l'on souhaite connaître la position des résonances, ainsi que leur forme exacte, il est nécessaire de connaître à la fois la fréquence des résonances guidées, leur facteur de qualité, ainsi que les paramètres exacts de la matrice de diffusion directe S .

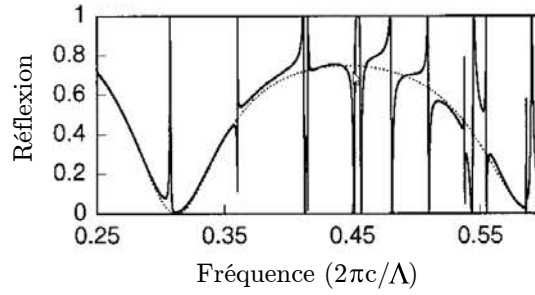


Fig. 2.11 Réponse spectrale typique d'un cristal photonique membranaire, tirée du travail de S. Fan dans [47]. La ligne continue est pour le cristal photonique fait de trous cylindriques de maille carrée, de pas Λ , de rayon de trous 0.2Λ et d'épaisseur $\Lambda/2$. La réponse du diélectrique non structuré est représentée par la ligne pointillée.

Les méthodes Finite Difference Time Domain (FDTD) et la Rigorous Coupled Wave Analysis (RCWA) sont deux façons d'obtenir le spectre de réflectivité, la première étant lourde du point de vue du temps de calcul et ne donnant que peu d'intuition sur la physique du problème, nous nous en servons seulement pour discuter des aspects de taille finie. La seconde, elle, plus légère, permet par ailleurs de donner plus d'intuition physique sur le problème.

Dans la section 2.3.2, nous avons trouvé l'expression des différents modes pouvant exister dans les zones homogènes de l'espace 1 et 3. Dans la section suivante, nous allons présenter une méthode, appelée RCWA, permettant de calculer les modes se propageant dans le milieu périodique 2, et ainsi, d'obtenir les coefficients de réflexion et de transmission de la membrane.

2.4.3 La méthode d'analyse par couplage entre ondes planes (RCWA)

La méthode présentée ici a d'abord été introduite pour étudier le couplage de la lumière dans les guides d'onde à l'aide de réseaux de diffractions [49]. Elle permet de calculer les propriétés de diffraction d'un réseau en décomposant le problème sur la base des ondes planes correspondantes aux modes diffractés dans le vide. Le réseau doit être composé de couches d'épaisseur finie dans lesquelles l'indice du milieu est périodique. Dans le cas qui nous intéresse, le problème peut se décomposer en trois couches, comme nous l'avons fait dans la section 2.3.2. Comme expliqué dans cette section, nous résoudrons séparément le problème de la propagation dans les différentes couches 1, 2, et 3 du problème, avant de calculer la matrice de diffusion globale en connectant les champs dans les différentes couches grâce aux conditions aux limites. La méthode permet en principe d'obtenir la matrice de diffusion du système pour un nombre arbitraire de couches, toutefois, chaque couche doit vérifier une hypothèse importante : l'indice du milieu $\epsilon(x, y, z)$ doit être invariant sur l'épaisseur de la couche.

Cas du cristal 1D en polarisation TM Par souci de simplicité, nous présenterons la méthode dans le cas simple où la modulation n'a lieu qu'à une dimension, et pour une polarisation incidente transverse magnétique (le champ magnétique est perpendiculaire au plan de la périodicité). On suppose en outre que la situation est invariante le long de

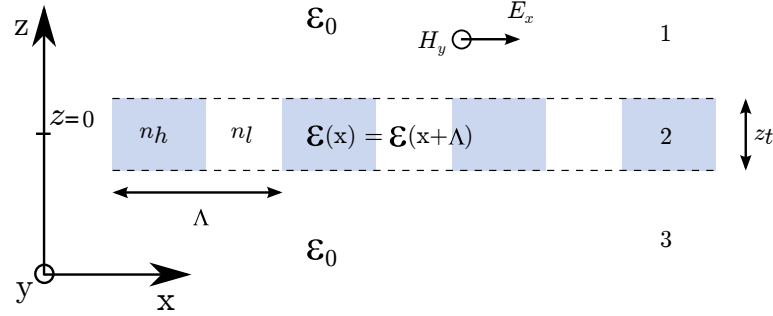


Fig. 2.12 Vue schématique du réseau de diffraction à une dimension en polarisation TM.

y. La Figure 2.12 rappelle le problème étudié ainsi que l'orientation du champ incident. Ces hypothèses permettent d'écrire :

$$\partial_y = H_x = H_z = E_y = 0 \quad (2.4.17)$$

Où ∂_i symbolise la dérivée par rapport à i . Nous pouvons donc développer les équations de Maxwell 2.2.3 et 2.2.4 :

$$-\partial_z H_y = \varepsilon(x) \partial_t E_x \quad (2.4.18)$$

$$-\partial_x H_y = \varepsilon(x) \partial_t E_z \quad (2.4.19)$$

$$\partial_x E_z - \partial_z E_x = \partial_t H_y \quad (2.4.20)$$

Décomposition en série de Fourier

Comme ε est périodique de période Λ , nous pouvons le développer en série de Fourier :

$$\varepsilon(x) = \sum_n \varepsilon_n e^{\frac{2i\pi n}{\Lambda} x} \quad (2.4.21)$$

En outre, nous développons les différentes composantes du champs suivant la forme de Bloch :

$$H_{y,k_{x0}} = \sum_n h_{n,k_{x0}}(z) e^{i(\frac{2\pi n}{\Lambda} + k_{x0})x} e^{i\omega t} \quad (2.4.22)$$

$$E_{x,k_{x0}} = \sum_n e_{x,k_{x0},n}(z) e^{i(\frac{2\pi n}{\Lambda} + k_{x0})x} e^{i\omega t} \quad (2.4.23)$$

$$E_{z,k_{x0}} = \sum_n e_{z,k_{x0},n}(z) e^{i(\frac{2\pi n}{\Lambda} + k_{x0})x} e^{i\omega t} \quad (2.4.24)$$

En combinant les équations 2.4.18, 2.4.19, 2.4.20 avec les expressions précédentes, on peut montrer que les composantes de Fourier vérifient l'équation matricielle suivante :

$$-\partial_z H(z) = i\omega \Xi \cdot E_x(z) \quad (2.4.25)$$

$$iN \cdot H(z) = i\omega \Xi \cdot E_z(z) \quad (2.4.26)$$

$$\partial_z E_x(z) = iN \cdot E_z(z) - i\omega H(z) \quad (2.4.27)$$

avec

$$H = \begin{pmatrix} h_{-n} \\ h_{-n+1} \\ \vdots \\ h_0 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}, \quad E_x = \begin{pmatrix} e_{x-n} \\ e_{x-n+1} \\ \vdots \\ e_{x_0} \\ \vdots \\ e_{x_n} \end{pmatrix}, \quad E_z = \begin{pmatrix} e_{z-n} \\ e_{z-n+1} \\ \vdots \\ e_{z_0} \\ \vdots \\ e_{z_n} \end{pmatrix}, \quad (2.4.28)$$

$$N = \frac{2\pi}{\Lambda} \begin{pmatrix} -n & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1-n & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & -1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & n \end{pmatrix} + k_{x0} I_d, \Xi = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & \varepsilon_{-1} & \cdot & \varepsilon_{1-2n} & \varepsilon_{-2n} \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_0 & \cdot & \varepsilon_{2-2n} & \varepsilon_{1-2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varepsilon_{2n-1} & \varepsilon_{2n-2} & \cdot & \varepsilon_0 & \varepsilon_{-1} \\ \varepsilon_{2n} & \varepsilon_{2n-1} & \cdot & \varepsilon_1 & \varepsilon_0 \end{pmatrix}. \quad (2.4.29)$$

Ξ est appelée matrice de Toeplitz. Pour obtenir ces expressions, les séries de Fourier ont dû être tronquées entre les ordres $-n$ et n . Puisque les conditions de continuité des champs aux interfaces ne concernent que les champs tangentiels, il est judicieux d'éliminer E_z du système précédent.

$$\partial_z \begin{pmatrix} E_x \\ H \end{pmatrix} = -i\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 - \frac{N \cdot \Xi^{-1} \cdot N}{\omega^2} \\ \Xi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ H \end{pmatrix}. \quad (2.4.30)$$

Cette matrice nous donne l'évolution des champs au sein de la structure : nous pouvons déduire l'évolution des champs à une interface connaissant les champs à l'interface opposée simplement en intégrant l'équation précédente :

$$\begin{pmatrix} E_x \\ H \end{pmatrix} = e^{Mz} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ H \end{pmatrix} (0), \text{ avec } M = -i\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 - \frac{N \cdot \Xi^{-1} \cdot N}{\omega^2} \\ \Xi & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.4.31)$$

Par ailleurs, les vecteurs propres de cette matrice sont les modes propres de la propagation suivant la direction z : de tels modes se propagent le long de l'épaisseur de la couche sans subir d'autres perturbations qu'une rotation de leur phase. Cette structure en bloc de la matrice M nous assure que si $\begin{pmatrix} E_x \\ H \end{pmatrix}$ est vecteur propre alors $\begin{pmatrix} E_x \\ -H \end{pmatrix}$ l'est aussi, associée à la valeur propre opposée. Ce mode propre dont le champ magnétique est inversé correspond simplement à l'onde contrapropageante dans la direction z . A titre d'illustration, il est aisément vérifiable que les ondes $\mathbf{H}_{k_x, n}^+$ et $\mathbf{H}_{k_x, n}^-$ dérivées à la section 2.3.2 sont bien des vecteurs propres de la matrice M dans le cas particulier d'un milieu homogène ($\epsilon_i = \delta_{0,i}$).

Comme nous l'avons fait à la section 2.3.2 pour les modes du milieu homogène, les modes propageants et contrapropageants sont définis dans la zone (2) par le signe de la partie réelle de leur valeur propre pour les modes propageants, et par celui de leur partie imaginaire pour les modes évanescents. Ils peuvent être obtenus en diagonalisant

numériquement la matrice M , ce que font les logiciels de RCWA³. Ainsi, nous pouvons construire la matrice de passage L , entre la base composée des différentes ondes planes diffractées et la base des modes propres propageant (Forward) et contrapropageant (Backward).

$$\begin{pmatrix} E_x \\ H \end{pmatrix}^{(j)} = L_j \begin{pmatrix} F_j \\ B_j \end{pmatrix}^{(j)}. \quad (2.4.32)$$

Dans la suite nous utiliseront la notation synthétique suivante pour les matrices par bloc L_j :

$$L_j = \begin{pmatrix} E_j & E_j \\ H_j & -H_j \end{pmatrix}. \quad (2.4.33)$$

Il est important de ne pas confondre les modes propres $\{F_j\}$ et $\{B_j\}$ avec les résonances guidées décrites à la section 2.3.2. Les premiers correspondent aux modes propres associés à la propagation suivant l'axe z (perpendiculaire à la périodicité) dans un milieu périodique dont l'épaisseur est à priori infinie. Les seconds sont des modes propres pour lesquels le champ dans le cristal membranaire (zone 2) est stationnaire suivant l'axe z , et dont les caractéristiques dépendent fortement de l'épaisseur du cristal. Comme nous allons le voir dans ce qui suit, ces résonances résultent des réflexions multiples des différents modes $\{F_j\}$ et $\{B_j\}$ sur les faces supérieures et inférieures de la membrane.

Matrices de transmission et de réflexion

Considérons deux milieux 1 et 2, le champ doit satisfaire les conditions de continuité pour un vecteur \mathbf{t} tangent à l'interface :

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (2.4.34)$$

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{t} = 0. \quad (2.4.35)$$

Utilisant ces relations, nous pouvons déduire les coefficients des matrices de transmission et de réflexion.

$$F^{(2)} = T.F^{(1)} + R.B^{(1)} \quad (2.4.36)$$

Ces matrices sont la généralisation des coefficients de transmission et réflexion d'un miroir. Généralement, elles ne sont pas diagonales, exprimant le fait qu'elles couplent différents modes propageants entre eux. Les conditions de continuité nous donnent :

$$E_1.(F_1 + B_1) = E_2.(F_2 + B_2) \quad (2.4.37)$$

$$H_1.(F_1 - B_1) = H_2.(F_2 - B_2). \quad (2.4.38)$$

Réolvons ce système pour obtenir les matrices de transmission et de réflexion :

$$R = (E_2 + E_1.H_1^{-1}.H_2)^{-1} \cdot (E_1.H_2^{-1}.H_1 - E_2) \quad (2.4.39)$$

$$T = 2(E_2 + E_1.H_1^{-1}.H_2)^{-1} \cdot E_1 \quad (2.4.40)$$

Immédiatement nous avons les matrices de transmission et de réflexion de la seconde interface en permutant les indices 1 et 2, nous les noterons \tilde{R} et \tilde{T} .

3. Il est possible d'obtenir la forme exacte des modes propres de la propagation suivant z sans passer par cette décomposition dans l'espace de Fourier dans certains cas simples [50].

Transmission globale

Nous allons calculer la transmission globale d'une manière très similaire au calcul d'une cavité Fary-Pérot : introduisons la matrice diagonale représentant l'évolution des modes du réseau sur son épaisseur.

$$\Phi = \begin{pmatrix} e^{-i\omega\beta_0 z_t} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & e^{-i\omega\beta_1 z_t} & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & e^{-i\omega\beta_{n-1} z_t} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & e^{-i\omega\beta_n z_t} \end{pmatrix},$$

avec β_i la i -ième valeur propre de la matrice M . Partant de l'onde propageante F_1 la réflexion sur la première interface nous donne :

$$F^{(2)}(0) = T.F^{(1)}(0) + R.B^{(2)}(0).$$

Ce qui nous donne :

$$\Phi^{-1}F^{(2)}(z_t) = R.\Phi.B^{(2)}(z_t) + T.F^{(1)}(0).$$

La même réflexion se produit en $z = z_t$:

$$B^{(2)}(z_t) = R.F^{(2)}(z_t) + T.B^{(3)}(z_t).$$

Puisqu'aucune onde n'est contrapropageante dans la zone (3), $T.B^{(3)}(z_t) = 0$, nous arrivons à :

$$\Phi^{-1}F^{(2)}(z_t) = R.\Phi.R.F^{(2)}(z_t) + T.F^{(1)}(0).$$

Ou encore :

$$F^{(2)}(z_t) = \Phi.R.\Phi.R.F^{(2)}(z_t) + \Phi.T.F^{(1)}(0).$$

Ce qui nous permet d'obtenir le champ propageant intracavité :

$$F^{(2)}(z_t) = (1 - \Phi.R.\Phi.R)^{-1}.\Phi.T.F^{(1)}(0).$$

Pour avoir immédiatement le champ transmis :

$$F^{(3)}(z_t) = \tilde{T}.(1 - \Phi.R.\Phi.R)^{-1}.\Phi.T.F^{(1)}(0) \quad (2.4.41)$$

$$= T_{tot}F^{(1)}(0). \quad (2.4.42)$$

Réflexion globale

De la même manière, nous trouvons la matrice de réflexion globale :

$$B^{(1)} = \tilde{T}.B^{(2)}(0) + \tilde{R}.F^{(1)}(0),$$

$$F^{(2)}(0) = T.F^{(1)}(0) + R.B^{(2)}(0),$$

$$B^{(2)}(z) = R.F^{(2)}(z),$$

et

$$F^{(2)}(z) = \Phi.F^{(2)}(0).$$

Ce qui nous donne finalement :

$$B^{(1)} = [\tilde{T}(1 - \Phi.R.\Phi.R)^{-1}.\Phi.R.\Phi.T + \tilde{R}].F^{(1)} \quad (2.4.43)$$

$$= R_{tot}.F^{(1)}. \quad (2.4.44)$$

Les expressions 2.4.41 et 2.4.43 permettent donc de calculer les spectres de transmission et de réflexion pour n'importe quelle structure périodique. En particulier, pour k_{x0}, ω vérifiant les conditions de réflexion spéculaire, seul le premier coefficient de $B^{(1)}$ et $F^{(1)}$ décrit une onde propageante. Ainsi, le processus de diffraction complexe décrit par les équations 2.4.41 et 2.4.43 peut se réduire à la donnée de simples nombres complexes $r = R_{tot0,0}$ et $t = T_{tot0,0}$ dans ce régime. En outre, le calcul de ces coefficients est très rapide, puisqu'il se réduit à la diagonalisation d'une matrice de dimension modeste : en effet, tronquer les matrices aux quelques premiers ordres de diffraction suffit généralement à obtenir une excellente approximation du résultat. Cette méthode permet ainsi d'obtenir une cartographie complète de la réflectivité pour les différents paramètres du cristal photonique. Nous utiliserons de tels spectres pour illustrer la physique de ces structures dans les prochaines sections.

La généralisation aux ondes TE et au cas des cristaux à deux dimensions ne présente pas de difficultés particulières ; toutefois, l'implémentation pratique d'une telle méthode générale tout comme son exposé formel ne présenterait que peu d'intérêt. Ainsi, après nous être placé dans le cas particulier traité ici, dans la section suivante, nous utiliserons par la suite le logiciel libre S^4 développé par V. Liu et S. Fan [51] pour résoudre le problème dans le cas le plus général.

2.4.4 Réflecteur à cristal photonique à 1D

Pour tenter d'identifier le lien entre les résonances guidées décrites à la section 2.3.2 et les différents modes se propageant suivant l'axe z du cristal, il est intéressant de tracer la réflectivité pour l'ordre 0 de diffraction en fonction de l'épaisseur du cristal photonique. De telles courbes, présentées sur la Figure 2.13 font apparaître des phénomènes résonnants dont la forme est intimement liée aux propriétés de dispersion des modes $F^{(2)}$. Ces courbes ont été tracées pour trois valeurs distinctes du taux de remplissage η du cristal. À gauche, le cas limite d'une lame homogène ($\eta = 1$), au milieu, la situation voisine où la largeur des trous s est très petite par rapport à la période Λ ($\eta = 1 - s/\Lambda = 0.95$) et, à droite, un milieu dans lequel $\eta = 0.8$. Les graphiques au dessus de la carte de réflectivité représentent la partie réelle et imaginaire des vecteurs d'onde $k_{z,n} = \omega\beta_n$ de ces modes.

Relations de dispersion et modes propres

Lame homogène : Le cas de la lame homogène est instructif car les différents modes composant $F^{(2)}$ sont connus : ils s'agit des ondes planes associées aux ordres diffractés $\{\mathbf{H}_{k_x,n}\}$ dérivés à la section 2.3.2. Toutefois, en raison de l'indice $n_r > 1$ du matériau

dans la zone 2, la relation de dispersion 2.3.24 est remplacée par :

$$k_{z,n} = ((n_r \omega / c)^2 + k_{x,n}^2)^{1/2}. \quad (2.4.45)$$

Ainsi, en incidence normale, et utilisant $\omega/c = 2\pi/\lambda$, nous avons :

$$k_{z,n} = \sqrt{(2\pi n_r / \lambda)^2 + (2n\pi / \Lambda)^2}. \quad (2.4.46)$$

On reconnaît ainsi les courbes de dispersion du mode $n = 0$, dont le vecteur d'onde reste réel quelque soit λ . Puis les modes dégénérés $n = \pm 1$, et $n = \pm 2$ qui sont évanescents respectivement pour $\lambda > n_r \Lambda$ et $\lambda > n_r \Lambda / 2$.

Milieu structuré : En présence de la modulation périodique d'indice, on observe une levée de dégénérescence dans les sous-espaces associés au premier et second modes diffractés (graphe du haut, colonne du milieu et de droite). On peut montrer que les vecteurs propres correspondants :

$$H_{y,n}^{(2)} = e^{ik_{z,n}z} \sum_{n_x} h_{n,n_x} e^{2in_x\pi x/\Lambda} \quad (2.4.47)$$

$$E_{x,n}^{(2)} = e^{ik_{z,n}z} \sum_{n_x} e_{n,n_x} e^{2in_x\pi x/\Lambda} \quad (2.4.48)$$

sont soit symétriques ($h_{n,n_x} = h_{n,-n_x}$, $e_{n,n_x} = e_{n,-n_x}$) soit antisymétriques ($h_{n,n_x} = -h_{n,-n_x}$, $e_{n,n_x} = -e_{n,-n_x}$) par rapport au plan médian du cristal. Comme les modes antisymétriques ne sont pas couplés à l'onde incidente, ni aux modes symétriques lors des réflexions et transmissions aux interfaces, ils ne jouent aucun rôle dans le problème et leur relation de dispersion est représentée en traits pointillés sur la Figure 2.13. En outre, plus la valeur de η est proche de 1, plus les vecteurs propres se rapprochent de la "somme" et de la "différence" des deux ondes planes diffractées (seules les valeurs des coefficients $h_{n,\pm n}$ et $e_{n,\pm n}$ sont importants). Ainsi, par abus de langage, on appellera "n-ième ordre diffracté" le n-ième mode propre symétrique à l'intérieur du cristal (voir Figure 2.14). Finalement, comme nous allons le voir par la suite, les domaines pour lesquels ces différents modes sont propagateurs ($k_{z,n}$ réel) jouent un rôle très important dans le problème. Nous avons coloré en vert la zone où seul l'ordre 0 est propageant, en jaune la zone où les ordres 0 et 1 sont propagateurs, et en rouge la zone où les ordres 0, 1 et 2 peuvent se propager dans la membrane.

Carte de réflectivité

Nous allons à présent commenter les cartes de réflectivité présentées dans la partie basse de la Figure 2.13.

Lame homogène : Dans le cas de la lame homogène (colonne de gauche), on observe un motif régulier dans lequel la réflectivité oscille entre une valeur minimale de 0 et une valeur maximale de $((1 - n_r^2)/(1 + n_r^2))^2 \approx 72\%$. Ces motifs, alignés sur les droites d'équation $t_z = n\lambda/2n_r$, sont la signature de l'effet Fabry Perot de l'ordre 0 entre les 2 faces de la lame. Comme on pouvait s'y attendre, les modes d'ordre supérieur ne jouent

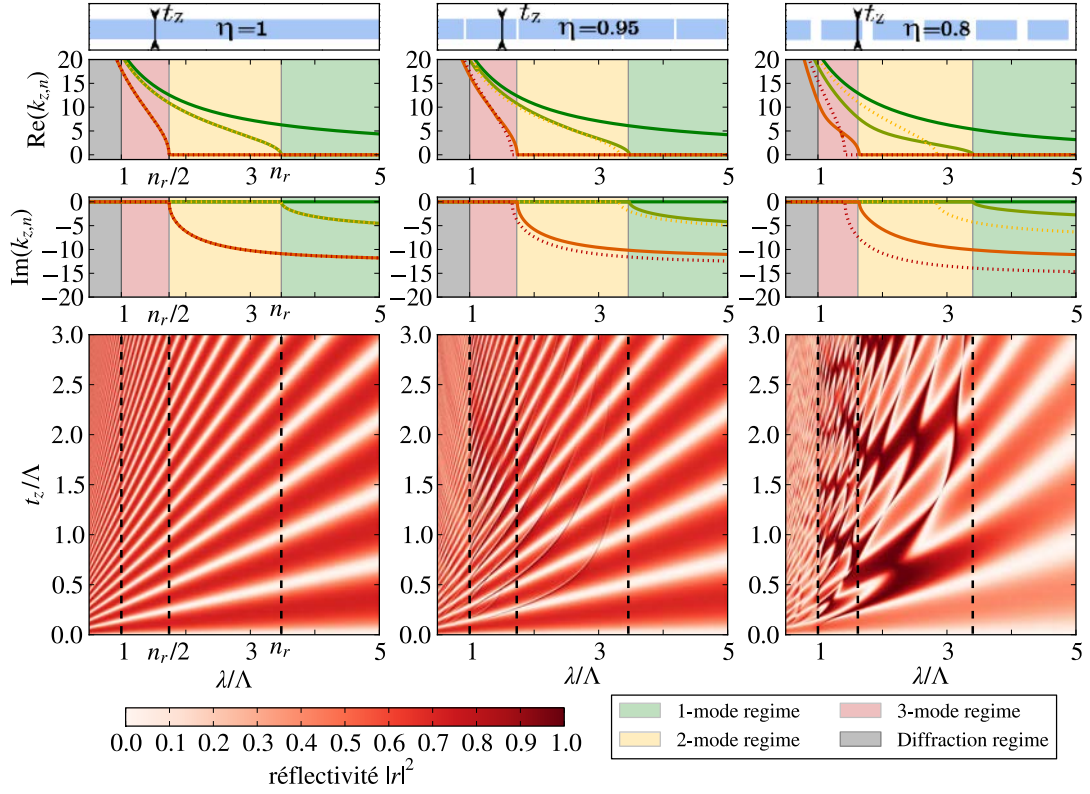


Fig. 2.13 Ligne du bas : cartes de réflectivité en fonction de la longueur d'onde et de l'épaisseur, toutes deux normalisées par la périodicité du cristal, pour une membrane non structurée à gauche, structurée faiblement au centre $\eta = 0.95$, et à droite pour une structuration importante $\eta = 0.8$ (voir ligne du haut). Lignes du milieu : parties réelles et imaginaires des composantes verticales des 5 premiers vecteurs d'onde $k_{z,n} = \omega\beta_n$.

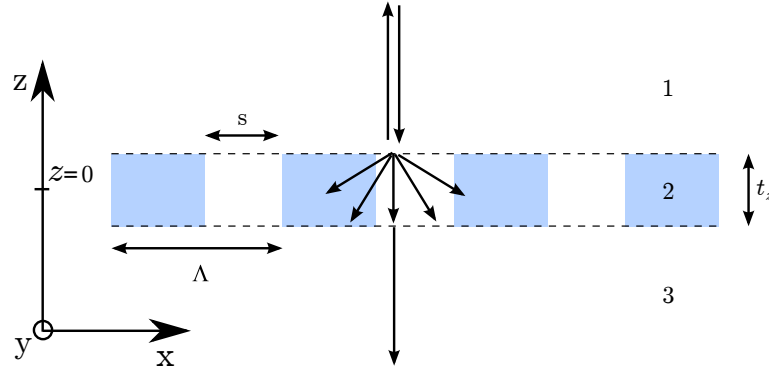


Fig. 2.14 Vue schématique du réseau de diffraction à une dimension.

aucun rôle dans le problème, car ils ne sont couplés ni à l'onde incidente, ni à l'ordre 0 dans le cristal lors des réflexions et transmissions aux interfaces : en effet, la valeur Λ de la périodicité, qui intervient dans la forme des modes $n > 0$, ne correspond pas à une propriété particulière du cristal et a été choisie de façon parfaitement arbitraire.

Membrane structurée : Lorsqu'on introduit une modulation de l'indice (colonne du milieu et de droite), on observe plusieurs régimes distincts suivant le nombre de modes propageants dans le cristal :

- Le cas monomode : pour $\lambda > \Lambda n_{eff}$, avec $n_{eff} \lesssim n_r$ un indice effectif du milieu structuré. La situation est très similaire à celle de la lame homogène, puisque les ordres supérieurs subissent une atténuation exponentielle entre les deux faces du cristal.
- Le régime de diffraction : comme nous l'avons déjà évoqué dans la partie 2.4.1, lorsque $\lambda > \Lambda$, la condition de réflexion spéculaire n'est plus assurée car plusieurs ordres diffractés existent dans les zones 1 et 3. Le cristal photonique se comporte alors comme un réseau de diffraction, et l'énergie perdue dans les ondes diffractées ne permet pas d'obtenir de réflectivité importante.
- Le régime multimode, ou encore "Near Wavelength Regime" [50] : pour $\Lambda < \lambda < \Lambda n_{eff}$. C'est ce régime présentant des propriétés de diffusion extraordinaires qui est utilisé pour réaliser des réflecteurs ou encore des filtres spectraux [48].

Dans chaque région où un ordre diffracté supplémentaire apparaît, on observe une famille de résonances de Fano comme celles décrites dans la section 2.4.2. Ces résonances se produisent lorsque l'épaisseur de la membrane permet à l'ordre diffracté d'accumuler la bonne phase entre les deux réflexions aux interfaces. Comme dans le cas d'une cavité Fabry Perot, on peut noter que cette condition se reproduit chaque fois que l'épaisseur augmente d'un multiple entier de $\pi/k_{z,n}$. Ainsi, on identifie les résonances guidées décrites dans la section 2.3.2 aux résonances de type Fabry Perot associées aux ordres de diffraction $n > 0$ entre les 2 faces de la membrane. Par ailleurs, plus les ordres diffractés dans le cristal sont différents des ondes planes diffractées dans les zones 1 et 3, plus les matrices de réflexion et transmission aux interfaces \bar{R} et \bar{T} couplent les modes $F^{(2)}$ entre eux et aux modes propageants dans les zones 1 et 3. Ainsi, le facteur de qualité des résonances guidées est d'autant plus grand que η est proche de 1 (la même conclusion s'applique lorsque le contraste d'indice entre la membrane et les "trous" tend vers 0). La lame homogène apparaît ainsi comme un cas limite dans lequel le facteur de qualité des résonances guidées est infini. On peut de plus observer l'aspect "damier" d'une telle carte de réflectivité, une alternance de zone de haute et de basse réflectivité. Ces motifs, qui apparaissent lorsque la largeur des résonances de Fano devient comparable à leur séparation, résultent de l'interférence entre les résonances de Fano associées alternativement aux modes pairs et impairs par rapport au plan médian de la membrane. Ces effets, discutés en détail dans les références [48, 50], sont particulièrement intéressants pour nos applications, puisqu'ils permettent d'obtenir une zone de haute réflectivité large en longueur d'onde.

Nous avons tenté de présenter ici les principaux phénomènes physiques donnant lieu aux propriétés de réflexion extraordinaires des cristaux photoniques membranaires à une dimension, ou encore "Near Wavelength Gratings" avant de passer aux cristaux photoniques à 2 dimensions dans la section suivante.

2.4.5 Réflecteur à cristal photonique à 2D

Nous venons de décrire les différents phénomènes physiques à l'oeuvre dans un réflecteur membranaire à cristaux photoniques à 1D. La Figure 2.15 présente une carte de réflectivité similaire pour un cristal photonique 2D fait de trous cylindriques de maille carrée [52]. Dans ce cas, les modes $F^{(2)}$ peuvent être développés sur la base des ondes planes diffractées dans les deux directions x et y :

$$\mathbf{H}_{y,n}^{(2)} = e^{ik_z z} \sum_{n_x, n_y} \mathbf{h}_{n_x, n_y} e^{2in_x \pi x / \Lambda} e^{2in_y \pi y / \Lambda} \quad (2.4.49)$$

$$\mathbf{E}_{x,n}^{(2)} = e^{ik_z z} \sum_{n_x, n_y} \mathbf{e}_{n_x, n_y} e^{2in_x \pi x / \Lambda} e^{2in_y \pi y / \Lambda} \quad (2.4.50)$$

Comme précédemment, on distingue trois régions selon la nature de ces modes : les régions monomode et diffractive donnent lieu sensiblement aux mêmes effets que précédemment, et la région "Near-wavelength Regime" se caractérise à nouveau par :

$$\Lambda < \lambda < \Lambda n_{eff} \quad (2.4.51)$$

avec $n_{eff} \approx 2.9$. Cette fois, on distingue deux familles de modes avec des coupures très proches l'une de l'autre (autour de $\lambda = 2.1 \mu\text{m}$ et $\lambda = 1.9 \mu\text{m}$). Ces familles, soulignées en pointillés jaunes et bleus sur la Figure 2.15 b correspondent aux premiers modes diffractés dans les directions x et y respectivement (notées abusivement (0, 1) et (1, 0) sur la Figure 2.15 a). A cause de la polarisation du champ incident (le champ magnétique de l'onde incidente est orienté suivant l'axe y), ces deux familles ne sont pas parfaitement dégénérées. Toutefois, en inversant la polarisation du champ incident, on inverse simplement le rôle de ces 2 familles de modes, ne modifiant pas les propriétés de réflexion du cristal. Ceci est une propriété importante qui découle de la symétrie du cristal par rotation de $\pi/2$ autour de l'axe des trous : le spectre de réflectivité en incidence normale est indépendant de la polarisation.

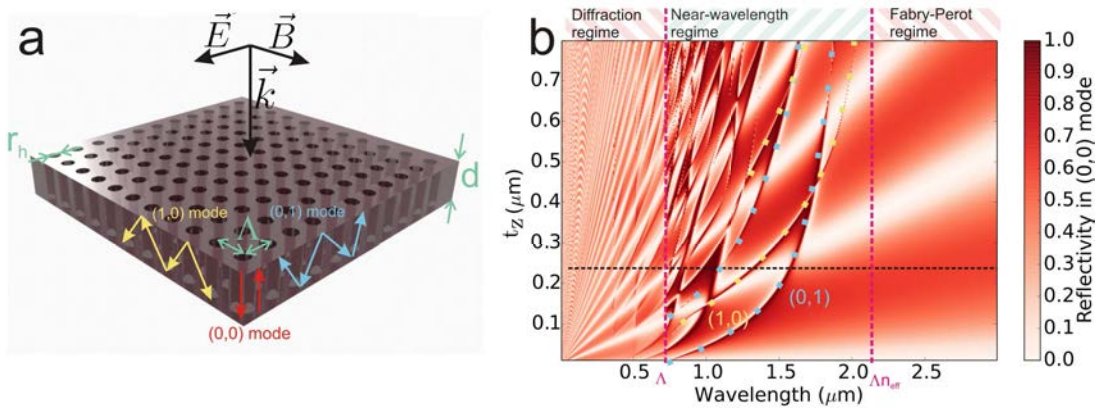


Fig. 2.15 a : Représentation schématique des principaux modes jouant un rôle dans la réflectivité du cristal à 2 dimensions. b : Simulation RCWA pour un cristal photonique 2D formé d'une membrane en InP ($n=3.2$) percée de trous d'air ($r=206 \text{ nm}$) ayant une maille carrée de côté 725 nm .

Le dispositif final devra, pour nos besoins, être le plus léger possible. On cherchera donc l'épaisseur minimale pour avoir une réflexion totale sur une large gamme de longueur d'onde. Cette zone est représentée sur la Figure 2.15 b par la ligne pointillée noire et correspond à une épaisseur de 265 nm.

Limite de la méthode

Bien que très rapide et demandant peu de ressources, ce type de méthode de résolution des équations de Maxwell souffre de quelques limitations. Outre les problèmes de convergence pour les structures de dimension supérieure à 1 en polarisation TM, améliorés par Lalanne [53], ou encore les effets de Gibbs pour des contrastes d'indice important, la méthode ne prend en compte que des ondes planes incidentes et des structures infinies. Or la taille latérale finie du cristal photonique brise l'invariance discrète par translation et donc la conservation du vecteur d'onde dans le plan du cristal (le théorème de Bloch ne peut plus s'appliquer rigoureusement). Bien que l'on puisse imaginer aisément que les cristaux fabriqués aient une taille limitée, ils peuvent être très grands devant la périodicité, on peut alors supposer localement que le mode optique voit un cristal infini. Pour nos applications optomécaniques, notre stratégie fut d'élaborer les structures les plus légères et les plus petites possibles. Ces effets de taille finie sont donc à prendre en compte lors du processus de développement. De plus, dans cette optique de réduction de taille de nos dispositifs, nous allons devoir les placer dans une cavité optique de très petit waist (voir chapitre 4), ce qui augmentera la dispersion des vecteurs d'ondes dans l'espace de Fourier. Il devient donc nécessaire de pouvoir prendre en compte ces différents effets.

2.5 Discussions

Comme expliqué dans le chapitre précédent, les membranes à cristal photonique sont développées dans le but de créer un couplage entre leur comportement mécanique et un champ optique. Ce couplage est renforcé par le recyclage du champ optique en créant une cavité Fabry-Pérot dont la membrane constitue l'un des miroirs. D'une part, le champ d'une telle cavité n'étant pas une onde plane mais un faisceau gaussien, nous pouvons nous demander si la réponse spectrale des cristaux photoniques, jusque là obtenue pour des ondes planes, en est modifiée. D'autre part, cherchant à minimiser les dimensions des structures finales, il paraît intéressant d'étudier l'évolution des propriétés optiques du cristal photonique à mesure que ses dimensions latérales diminuent. Pour pouvoir prendre en compte de tels effets il nous faut utiliser une autre méthode de simulation que la RCWA qui ne considère que des structures infinies avec pour source des ondes planes. La méthode utilisée est le calcul par différences finies dans le domaine temporel (FDTD).

2.5.1 La méthode FDTD

Une des techniques naturelles pour résoudre les équations des ondes électromagnétiques dans une structure périodique est la FDTD. Elle fut proposée par K. S. Yee in [54] en 1966, et consiste à discrétiser spatialement et temporellement les équations de

Maxwell, transformant dérivées partielles en différences finies et intégrales en sommes, utilisant aux frontières du domaine de calcul les conditions aux limites adéquates aux problèmes traités [55, 56]. Le comportement spectral d'une structure est obtenu en prenant la transformée de Fourier de l'évolution temporelle du champ. Elle offre ainsi la possibilité de simuler des structures de taille latérale finie et un choix de sources des champs varié. Utilisant le package libre Meep distribué par le MIT [57], nous avons dans un premier temps vérifié la concordance de cette méthode avec les résultats obtenus par RCWA, voir 2.16.

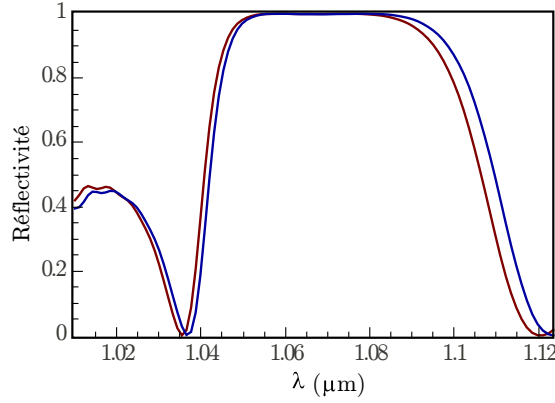


Fig. 2.16 Comparaison de la réflectivité simulée par RCWA (courbe rouge) et FDTD (courbe noire).

2.5.2 Influence de la taille du waist

Régime monomode en incidence oblique

Avant de présenter les différents résultats concernant les membranes de taille finie, nous revenons sur la condition $\Lambda < \lambda$ permettant le fonctionnement du réseau de diffraction dans le régime monomode. Rigoureusement, ce n'est valable qu'en incidence normale pour une onde plane. Nous allons montrer dans cette section que cela reste vrai pour des angles d'incidence relativement grands correspondant à des tailles de faisceau optique plus petit que ceux dont nous nous servons.

Cherchons quel est l'angle limite θ pour rester dans la zone de réflexion spéculaire de la Figure 2.6. La composante du vecteur d'onde du premier ordre diffracté selon x s'écrit :

$$k_{x,1} = 2\pi c \left(\frac{\sin(\theta)}{\lambda} + \frac{1}{\Lambda} \right). \quad (2.5.1)$$

L'onde sera évanescence si :

$$k_{x,1}^2 > \left(\frac{2\pi c}{\lambda} \right)^2, \quad (2.5.2)$$

En admettant la condition du régime spéculaire en incidence normale $\lambda > \Lambda$ respectée, et en supposant $\theta > 0$, l'équation 2.5.2 est équivalente à :

$$\sin(\theta) < \frac{\lambda}{\Lambda} - 1, \quad (2.5.3)$$

ce qui est toujours vérifié si $\lambda > 2\Lambda$. Sinon il faut :

$$\theta < \arcsin\left(\frac{\lambda}{\Lambda} - 1\right) \approx 27.9^\circ. \quad (2.5.4)$$

L'application numérique a été réalisée pour la structure décrite par la ligne pointillée dans la Figure 2.15, en prenant une longueur d'onde du faisceau incident de 1064 nm, qui en pratique nous donne une dispersion angulaire de 12.7° pour un waist équivalent de $1.5 \mu\text{m}$, ce qui reste largement au-dessus du seuil établi.

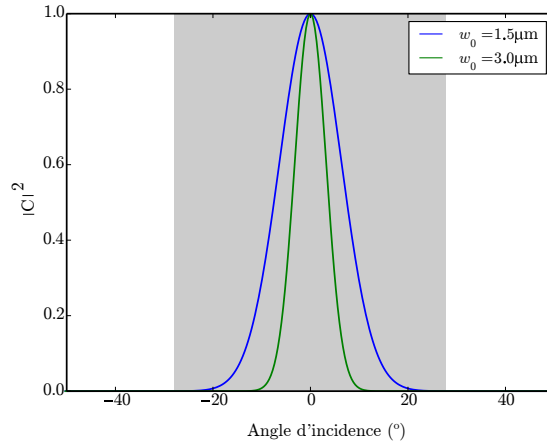


Fig. 2.17 Composantes angulaires de deux faisceaux gaussiens. La zone grise représente la région monomode pour les paramètres $\lambda = 1064 \text{ nm}$ et $\Lambda = 725 \text{ nm}$.

Basée sur cette inégalité, la Figure 2.17 montre les composantes angulaires des faisceaux gaussiens d'intérêt, rassemblés dans la région monomode représentée par la zone grisée. Cela montre que, même pour des waists plus petits que ceux considérés, l'argument de fonctionnement en régime monomode reste valable.

Approximation en champ lointain

Nous venons de voir que le fonctionnement du cristal photonique dans le régime monomode est assuré même pour de faibles waists. Il nous faut cependant vérifier que la longueur d'onde de résonance n'est pas trop décalée pour de tels angles. Nous avons donc simulé par RCWA la transmission d'un cristal infini pour différents angles d'incidence à $1.064 \mu\text{m}$ (Figure 2.18). Utilisant l'approximation du champ lointain nous donnant la divergence angulaire pour un waist w_0 donnée par $\arctan(\theta) = \pi w_0 / \lambda$, nous avons représenté par les lignes en pointillés la dispersion angulaire limite pour des waists de 4.2 et $2.1 \mu\text{m}$.

On observe bien que la transmission dépend de l'angle d'incidence, donc de la composante transverse du vecteur d'onde, mais reste inférieure à 10^{-2} pour des angles inférieurs à la dizaine de degrés, ce qui ne devrait pas entraîner de limitation pour l'obtention de réflecteur de très bonne qualité.

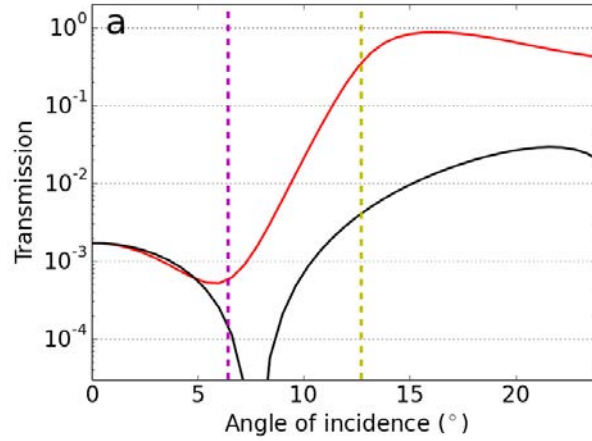


Fig. 2.18 Transmission d'une membrane infinie en fonction de l'incidence angulaire (rouge : Polarisation TE, noir : polarisation TM). Les lignes pointillées violette et jaune étant respectivement les dispersions angulaires associées à un faisceau à $1.064 \mu\text{m}$ de waist 4.2 et $2.1 \mu\text{m}$.

2.5.3 Taille finie du cristal

Nous avons ensuite étudié par FDTD le comportement d'un cristal photonique de dimension latérale finie éclairé par une source gaussienne. Pour cela, nous avons simulé des structures de différentes tailles latérales éclairées par un faisceau gaussien de différents waists. Les structures sont contenues dans une boîte à trois dimensions servant de contour d'intégration pour les différents flux. Ceci nous permet de quantifier les éventuelles fuites latérales des modes guidés. Nous avons simulé des cristaux photoniques carrés de taille 10 et $30 \mu\text{m}$ et des waists de 1.5 , 2 , 3 et $4 \mu\text{m}$.

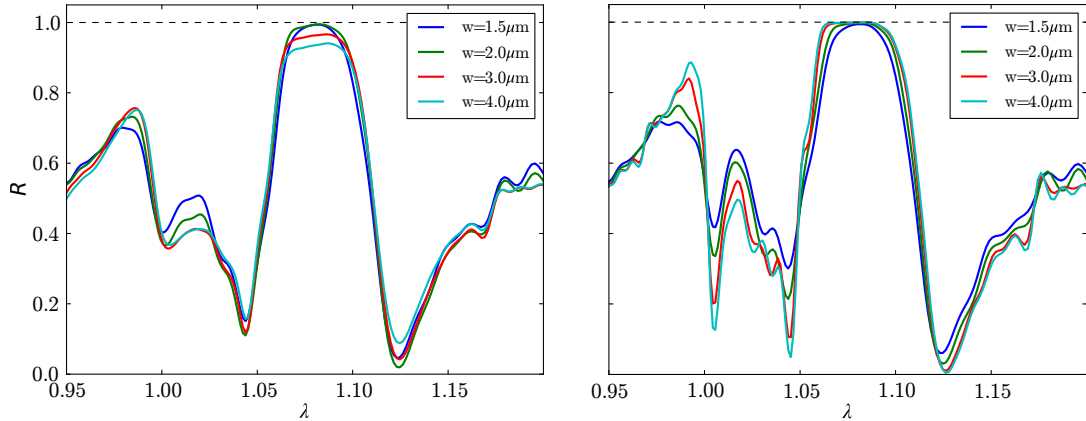


Fig. 2.19 Spectre de réflectivité obtenu par FDTD pour des cristaux photoniques carrés de 10 et $30 \mu\text{m}$ de côté (resp. à gauche et à droite), et ce pour différentes tailles de waist.

Notons, figure 2.19, le décalage du plateau de réflectivité centré à $1.080 \mu\text{m}$ et non à $1.064 \mu\text{m}$. Cet effet est principalement dû à l'abaissement de la résolution des simulations à 32 points par μm , imposé par la limite des ressources informatiques disponibles. La figure de gauche montre que pour un cristal photonique de $10 \mu\text{m}$ de côté, seuls les waists de 2 et $1.5 \mu\text{m}$ ont une réflectivité proche de 1 mais le plateau n'est

pas préservé. A gauche, la structure de $30\text{ }\mu\text{m}$ montre de larges plateaux de réflectivité comme prédit pour le cas infini en incidence normale pour des waists de 3 et $4\text{ }\mu\text{m}$ mais qui commencent à se rétrécir pour des waists plus petits.

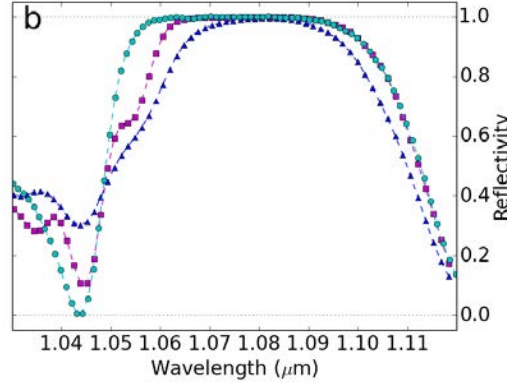


Fig. 2.20 Simulation FDTD, d'un cristal photonique à deux dimensions pour une épaisseur de 267 nm , pour trois configurations différentes : le cas d'une onde plane en incidence normale sur le cristal infini (cercle vert), puis un cristal photonique de $30\times 30\text{ }\mu\text{m}^2$ éclairé par un faisceau gaussien de waist $4.2\text{ }\mu\text{m}$ (carré violet) et $2.1\text{ }\mu\text{m}$ (triangle bleu).

La Figure 2.20 compare le cas d'un cristal infini (ronds bleus) avec les waists de 4.2 ou $2.1\text{ }\mu\text{m}$. On observe bien que l'on conserve un plateau où la réflectivité est supérieure à 99% , sur 20 nm pour un waist de $4.2\text{ }\mu\text{m}$ (carrés violets), avec cependant une légère diminution de sa largeur pour des waists de plus en plus petits.

2.5.4 Déviation conique

Une autre source de déviation par rapport aux simulations faites pourrait être la conicité des trous introduite lors des processus de fabrication. On peut en effet se douter qu'un tel changement de géométrie puisse perturber le comportement en réflexion du cristal photonique. En effet, le cristal perd alors son plan de symétrie horizontale, et pourrait donc voir les conditions d'interférence des deux ordres diffractés dans la membrane modifiées.

La Figure 2.21 gauche montre une coupe d'un cristal après l'étape de gravure. L'image suggère une légère conicité des trous du cristal ; cependant la mesure expérimentale directe d'une telle déviation géométrique est difficile à mettre en oeuvre. En effet, pour avoir une mesure fiable, il faudrait avoir un plan de coupe du cristal parfaitement normal au plan du cristal, ou alors pouvoir faire une image des deux faces et mesurer les deux rayons apparents ; cependant le processus de fabrication nous empêche, pour l'instant, d'avoir accès à la face arrière des membranes. Bien que la mesure soit délicate à mettre en oeuvre, nous avons voulu voir l'effet d'une déviation conique sur les spectres de réflectivité du cristal. Pour cela, nous avons procédé à des simulations, en prenant un profil de trous conique, avec l'un des rayons (r_1) fixé à 196 nm , paramètre établi de haute réflectivité à $1.064\text{ }\mu\text{m}$, et en faisant varier de part et d'autre le deuxième rayon (r_2). La Figure 2.21 droite présente les transmissions associées à ces différentes simulations. Nous pouvons constater que la réflectivité en

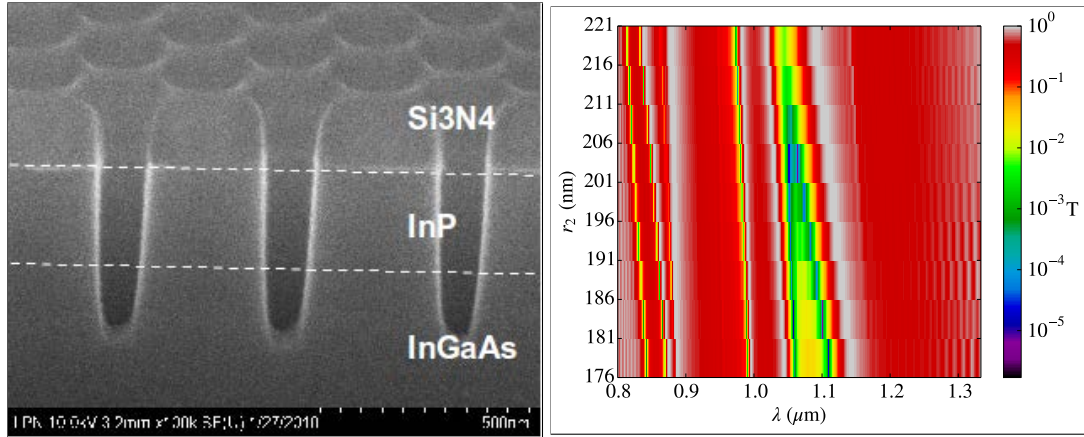


Fig. 2.21 Gauche : Image MEB d'une coupe d'un cristal photonique après la gravure. Droite : simulation de la réflectivité pour des trous coniques avec r_1 fixé à 196 nm et r_2 prenant les valeurs de 176 à 206 nm.

est bien modifiée, mais que pour un paramètre r_2/r_1 proche de 1, seule la position des résonances est modifiée et non leur qualité. Ainsi, une faible conicité des trous peut être en partie responsable de décalages spectraux entre simulations et mesures expérimentales. Cependant, elle ne devrait pas affecter le maximum de réflectivité pour de petites déviations.

2.6 Fabrication

La fabrication de nos structures s'est déroulée au Laboratoire de Photonique et de Nanostructures (LPN) en collaboration avec l'équipe d'Isabelle Robert-Phillip dans le cadre de plusieurs projets : QNEMS (STREP), MINOTORE (ANR), CQOM (ITN), NANOMECAATOM (DIM Nano-K). Ce laboratoire est spécialisé dans les matériaux semiconducteurs III-V. Celui qui a principalement été utilisé pendant ces travaux de thèse est le phosphore d'indium qui a l'avantage de présenter un gap direct à 1.334 eV (300 K), ne présente aucune absorption mesurée à 1064 nm, et présente un indice de réfraction élevé de 3.28, facilitant ainsi la création de miroirs large bande. La maîtrise par le LPN de la gravure de tels matériaux en fait un très bon candidat pour le développement de miroirs à cristal photonique. La Figure 2.22 synthétise les différentes étapes nécessaires pour l'obtention des résonateurs membranaires à cristal photonique.

Épitaxie :

La première étape consiste à épitaxier sur un wafer de d'InP d'épaisseur de 330 μm , 1 μm d'InGaAs servant de couche sacrificielle au moment de la libération des membranes. Sur cette couche, on dépose par (MBE/MOCVD) l'épaisseur voulue d'InP, 267 nm dans notre cas.

Réalisation des cristaux photoniques :

Vient ensuite la définition des cristaux photoniques, dont les paramètres sont balayés autour des valeurs optimales obtenues par simulation numérique. Pour la définition du masque servant à la gravure des trous du cristal, 300 nm de SiN sont déposés ainsi

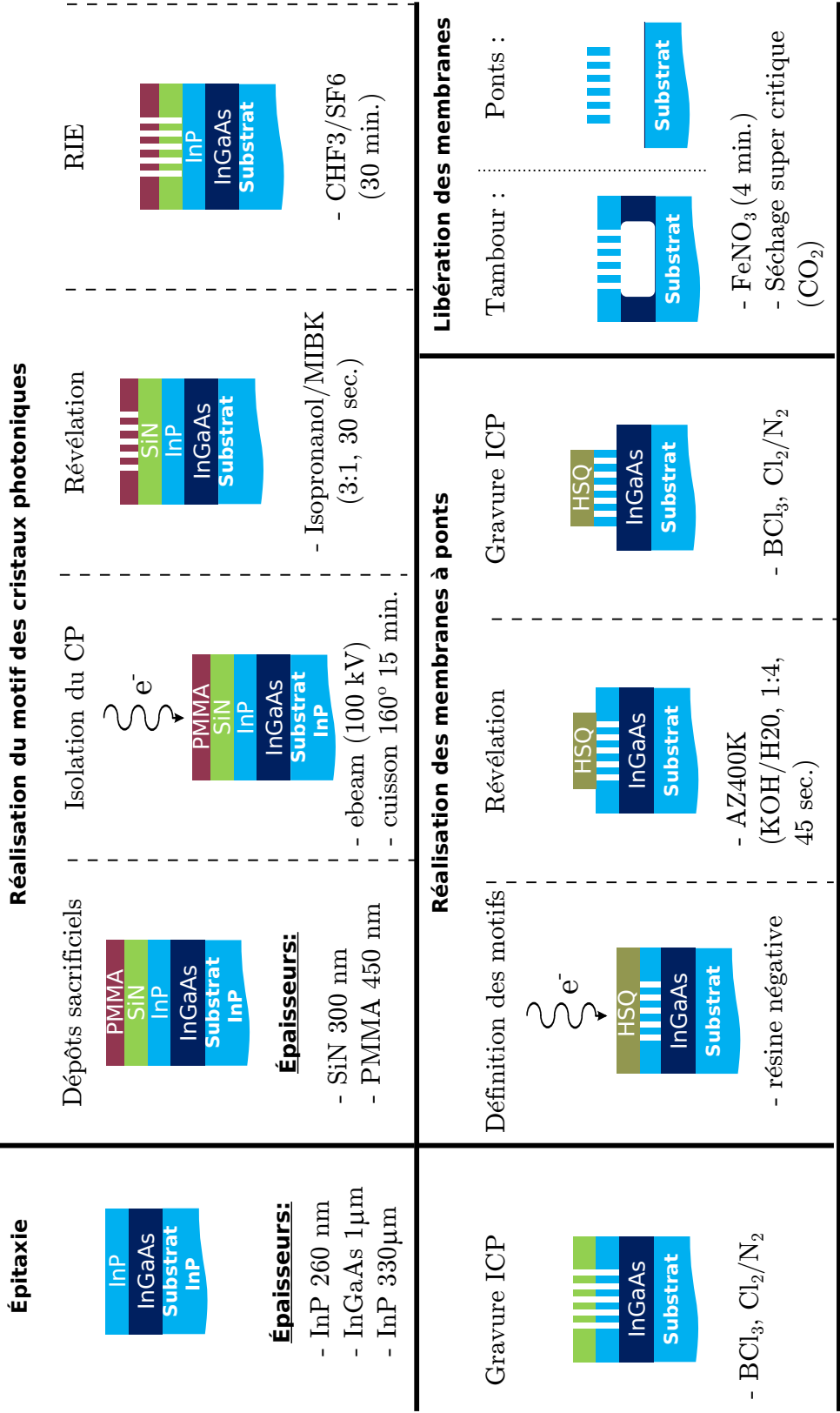


Fig. 2.22 Schéma des différentes étapes nécessaires à la création de membranes à cristal photonique.

qu'une résine de lithographie électronique PMMA (environ 450 nm) obtenue par centrifugation de 30 sec. à 4000 tours/min avec une concentration dite A7 (nomenclature industrielle). La résine, après avoir été cuite à 160° pendant 15 min., est insolée par un faisceau d'électrons à 100 kV suivant les paramètres du cristal, puis révélée par un mélange d'isopropanol/MIBK de concentration 3 :1 pendant 30 sec. La résine sert ensuite de masque pour la gravure ionique réactive (RIE) du SiN pendant 30 minutes, utilisant comme espèce réactive CHF₃ et SF₆. L'épaisseur restante de PMMA protégeant les parties du SiN à ne pas graver est ensuite éliminée par plasma O₂ pendant 2 min. Les cristaux photoniques sont ensuite reportés dans l'InP par un procédé de gravure par plasma inductif couplé (ICP), utilisant BCl₃ et Cl₂/N₂, développé au LPN et permettant une qualité de gravure inégalée [58]. Le reste de SiN protégeant les parties non gravées de l'InP est ensuite éliminé par une solution de HF très diluée.

Réalisation des structures mécaniques :

Pendant cette thèse, deux types de membranes ont été développées : des membranes dites tambour, où la partie libérée est définie par le cristal photonique. Ainsi que des membranes à ponts comme développé dans le chapitre 3. La définition de la géométrie de ces dernières ajoute une étape en plus dans le procédé de développement. Pour cela, une résine négative de lithographie électronique (HSQ) est déposée sur les échantillons avec cristaux photoniques. Elle est ensuite insolée selon les motifs souhaités puis révélée avec un mélange de KOH dilué (1 :4) pendant 45 sec, ce qui permet d'effectuer une deuxième étape de gravure ICP et de créer les structures mécaniques.

Libération des membranes :

L'étape finale consiste en la libération de membranes par une gravure au FeNO₃, utilisant les trous du cristal photonique pour accéder à la couche sacrificielle composée d'InGaAs. S'ajoute ensuite une étape dite de séchage supercritique permettant l'évaporation des solutions de gravure pour éviter tout effondrement des membranes sur le substrat par capillarité.

La Figure 2.23 présente les deux types de structures exploitées dans les travaux de cette thèse. Des membranes dites tambours servant à l'optimisation optique, ainsi que des membranes à ponts issues de l'optimisation mécanique présentée au chapitre 3. Nous pouvons observer la régularité des motifs du cristal, ainsi que la profondeur apparente de la sous-gravure d'environ 2 µm (traits rouges).

2.7 Caractérisation des membranes à cristal photonique

2.7.1 Mesures préliminaires

Dans un premier temps, nous avons fait une caractérisation grossière de la réponse spectrale des membranes permettant de situer les plateaux de haute réflectivité nécessaires pour l'élaboration de cavité Fabry-Pérot avec les membranes. Pour cela nous avons utilisé le montage présenté Figure 2.24. Il est composé d'un laser à diode accordable, sur une plage de 990 à 1085 nm, focalisé sur les échantillons à l'aide d'une lentille combinée avec un objectif de microscope. Grâce à une lame 50/50, la moitié de l'in-

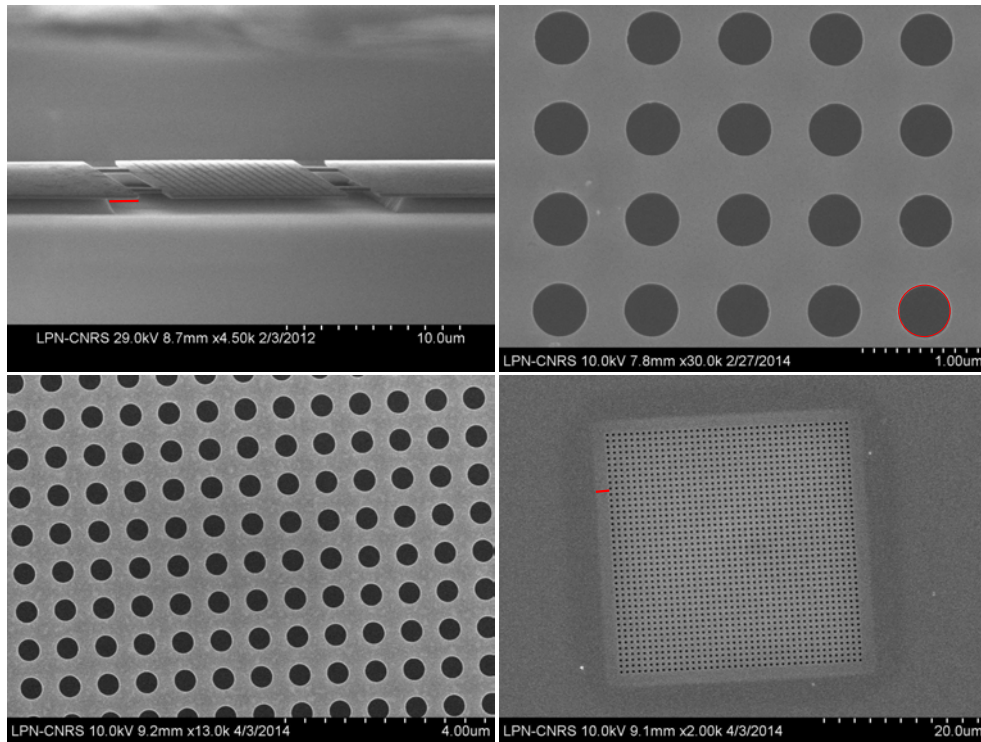


Fig. 2.23 Images MEB montrant plusieurs exemples de structures réalisées avec la procédure de fabrication expliquée précédemment.

tensité réfléchiée par l'échantillon est envoyée sur une photodiode, l'autre moitié étant absorbée par les dispositifs anti-retour du laser. Une routine écrite en langage *python* permet de balayer la longueur d'onde du laser tout en acquérant le signal délivré par la photodiode via un oscilloscope. Bien qu'une référence de réflectivité ait été faite avec

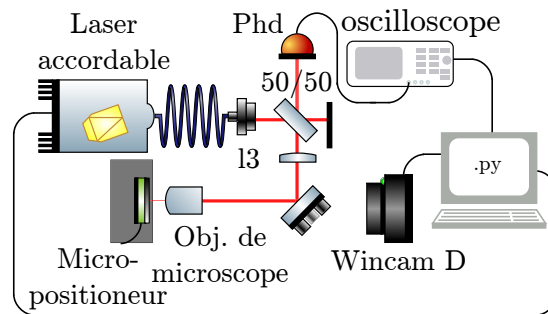


Fig. 2.24 Schéma du montage servant à mesurer les réponses spectrales des membranes à cristal photonique.

un miroir parfait ($T = 60$ ppm) et que les différents offset lumineux et électroniques aient été pris en compte, nos mesures n'ont pu être proprement renormalisées, sans doute à cause d'effet Fabry-Pérot entre l'objectif de microscope et les échantillons. Les mesures présentées ont donc servi à vérifier la forme globale des réponses spectrales, ainsi qu'à déterminer les plateaux de haute réflectivité servant pour la mise en cavité

des membranes. La Figure 2.25 présente les mesures faites sur un échantillon de membrane en InP d'épaisseur visée de 267 nm. Les différents cristaux photoniques ont tous une période de 725 nm. Sont présentées : les réponses spectrales de cristaux ayant des rayons de trous visés de 216 nm (gauche), 206 nm (centre) et 176 nm (droite). Trois doses d'insolation électronique ont été utilisées, 1100 (courbe bordeaux), 1350 (courbe orange) et 1500 (courbe verte), permettant une exploration du diamètre des trous plus fine. En haut figurent les simulations de la réflectivité attendue pour ces différentes structures. Pour point de comparaison, les lignes pointillées rouges indiquent la correspondance des minimums de réflectivité. Bien que les formes globales des réponses spectrales soient en très bonne correspondance avec les simulations, on peut observer un léger décalage. En outre, le décalage entre les différentes doses est flagrant, témoignant des différentes tailles de trou explorées en changeant la dose d'insolation.

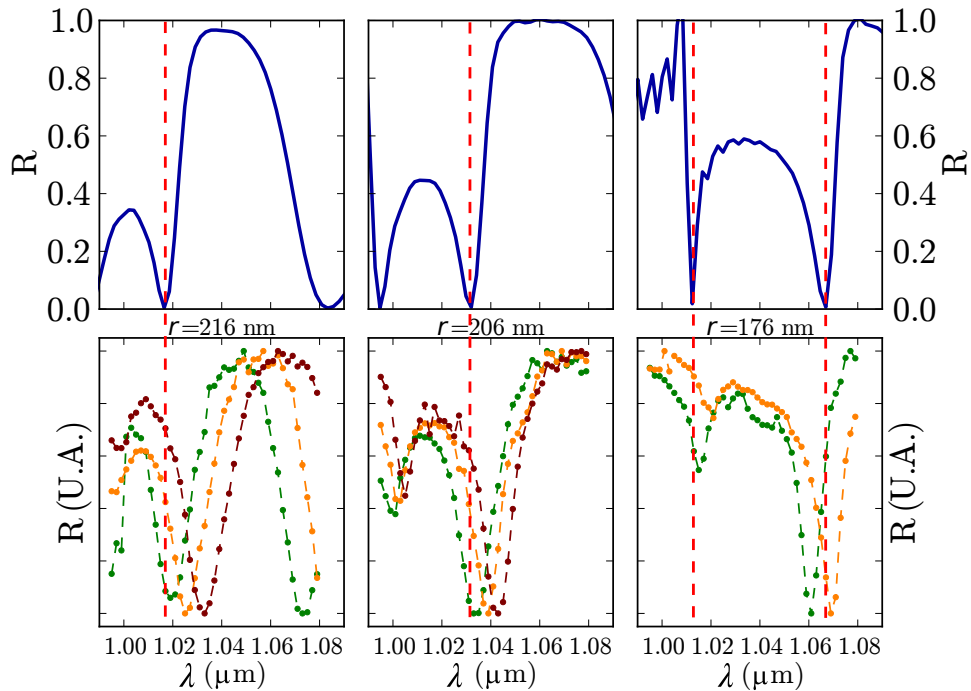


Fig. 2.25 Exemple de comparaison de la réponse spectrale de cristaux photoniques entre simulation par FDTD (en haut) et mesures expérimentales (en bas). L'épaisseur des membranes est de 267 nm, le pas du cristal est de 725 nm pour des rayons de trou variants : à gauche, 216 nm ; au centre, 206 nm et à droite, 176 nm. Les trois courbes expérimentales correspondent à trois doses d'insolation différentes : 1100, 1350 et 1500, resp. bordeaux, orange, olive.

Chaque matrice de cristaux photoniques a été doublée sur l'échantillon afin de contrôler la répétabilité des paramètres finaux des cristaux. La Figure 2.26 résume, pour l'ensemble de l'échantillon, la position des minima de réflectivité (valeur repérée par la ligne pointillée rouge Figure 2.25). Chaque couleur est associée à une variation du rayon des trous de 176 nm à 216 nm par pas de 5 nm, et ce, pour les 6 séries de cristaux. L'absence de mesures pour certaines membranes vient du fait qu'elles étaient soit effondrées soit salies. Les barres d'erreur associées aux mesures sont systématiques,

et dues à l'incrémentation de 1 nm pour la longueur d'onde du laser. Pour point de comparaison, la ligne bleue représente les positions en longueur d'onde simulées des minimums de réflectivité. Nous pouvons voir, sur l'ensemble de ces mesures, la bonne concordance entre deux séries ayant subi la même dose d'insolation, et de manière générale, une bonne correspondance entre les mesures et les simulations. De plus, il semblerait que les cristaux ayant subi un dosage de 1500 soit les plus proches des résultats de simulation. Les lignes rouges et vertes sont obtenues, respectivement, pour une épaisseur de 267 nm et un indice optique de 3.3, et pour une épaisseur de 272 nm et un indice optique de 3.28. Elles illustrent la difficulté à identifier, sur la faible gamme de longueur d'onde explorée, la provenance des écarts entre mesures et simulations : la tailles des trous, une épaisseur légèrement supérieure ou encore un indice optique différent de la valeur tabulée donnent lieu à des effets similaires.

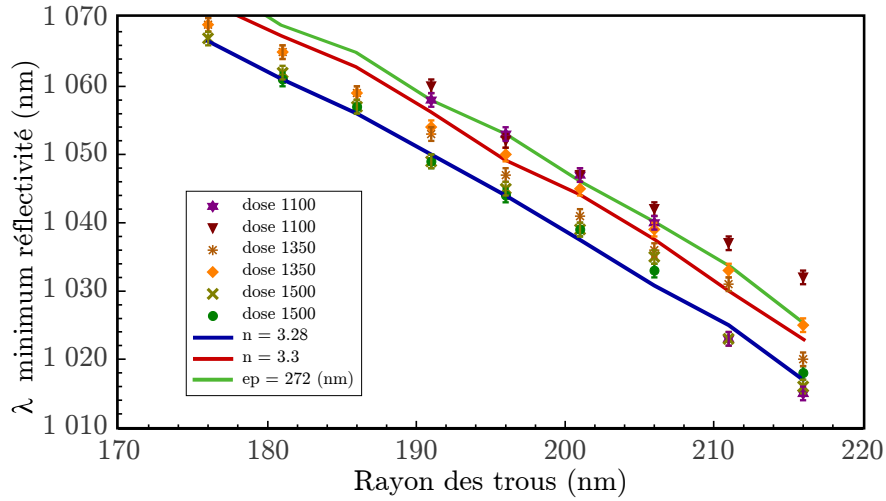


Fig. 2.26 Position en longueur d'onde des minimums de réflectivité simulés (lignes) et mesurés (symbole) sur les différentes matrices de cristaux fabriquées, correspondant aux trois doses d'insolation 1500, 1350 et 1100. La ligne bleue est le résultat de simulations faites avec une épaisseur de 267 nm et un indice optique de 3.28. La ligne rouge est celui obtenu pour une épaisseur de 267 nm et un indice optique de 3.3, et la ligne verte celui obtenu pour une épaisseur de 272 nm et un indice optique de 3.28.

2.7.2 Mesures de plateaux de haute réflectivité

Après avoir repéré, grâce aux mesures préliminaires de réflectivité, la position spectrale des plateaux de haute réflectivité, nous avons procédé à la mise en cavité des échantillons puis effectué des mesures de finesse optique nous permettant d'obtenir des valeurs de réflectivité très précises (voir chapitre 4). Ceci nous a permis de comparer la valeur des coefficients de réflexion en fonction du rayon des trous (voir Figure 2.27). Pour ces premières mesures, nous avons utilisé un miroir d'entrée de cavité de 1.4% de transmission, ce qui nous a permis de réaliser des mesures en réflexion pour des valeurs de réflectivité des membranes jusqu'à un minimum de 70%. En contrepartie, l'erreur est plus grande dans la zone R proche de 1. Les mesures présentées Figure 2.27 ont été obtenues pour une des séries de cristaux photoniques ayant subi une dose d'inso-

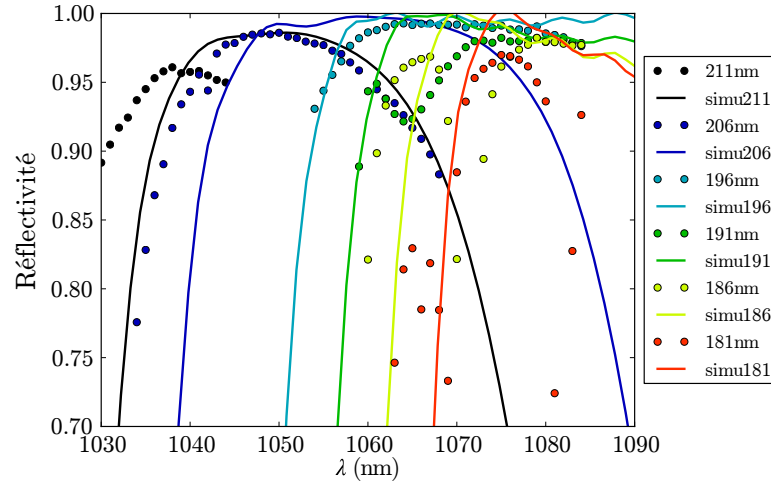


Fig. 2.27 Mesure du plateau de réflectivité déduite de la mise en cavité des membranes, en utilisant comme miroir d'entrée un coupleur de transmission 1.4%.

lation de 1500, qui, d'après les mesures précédentes, ont qualitativement une réponse spectrale la plus proche des simulations. Nous voyons que les plateaux de réflectivité sont en bon accord avec les simulations, et en particulier pour le cristal ayant un diamètre de trou de 196 nm. Toutefois, un léger désaccord sur l'amplitude et la position du plateau peut être remarqué pour les valeurs extrémales.

Dans un deuxième temps, nous avons utilisé un miroir d'entrée de transmission 0.04%, ce qui nous a permis d'avoir des mesures de finesse, et donc de réflectivité, plus précises pour les valeurs proches de 1. Pour cela, nous avons utilisé la membrane ayant un rayon de trous de 196 nm. Cette dernière a été identifiée par la mesure précédente comme ayant, en plus d'une réponse très similaire aux simulations, une réflectivité supérieure aux autres cristaux. De plus, son plateau de haute réflectivité se situe vers 1064 nm, (voir Figure 2.27). Avec cette membrane, nous avons mesuré des finesesses de cavité optique valant jusqu'à 2500, correspondant à une réflectivité de 99.8% (voir Figure 2.28). De plus, cette structure possède un plateau de réflectivité supérieur à 99.5% sur plus de 20 nm autour de 1065 nm, et une valeur de réflectivité à 1064 nm de 99.78%.

La provenance des pertes n'a pas pu être encore établie. Quelques pistes restent toutefois à explorer, comme la mesure de la rugosité rms de surface des membranes après les différentes étapes de fabrication. De plus, bien que l'absorption de l'InP à 1064 nm soit considérée comme nulle dans la littérature, elle ne doit pas l'être dans notre cas. En effet, comme nous le verrons dans le chapitre 4, une partie des effets thermiques observés sur la réponse aux forces de Langevin ne peut être expliquée que par l'absorption du champ incident par la membrane. Malheureusement, ces mesures ne nous ont pas permis d'extraire de valeur pour ce coefficient d'absorption.

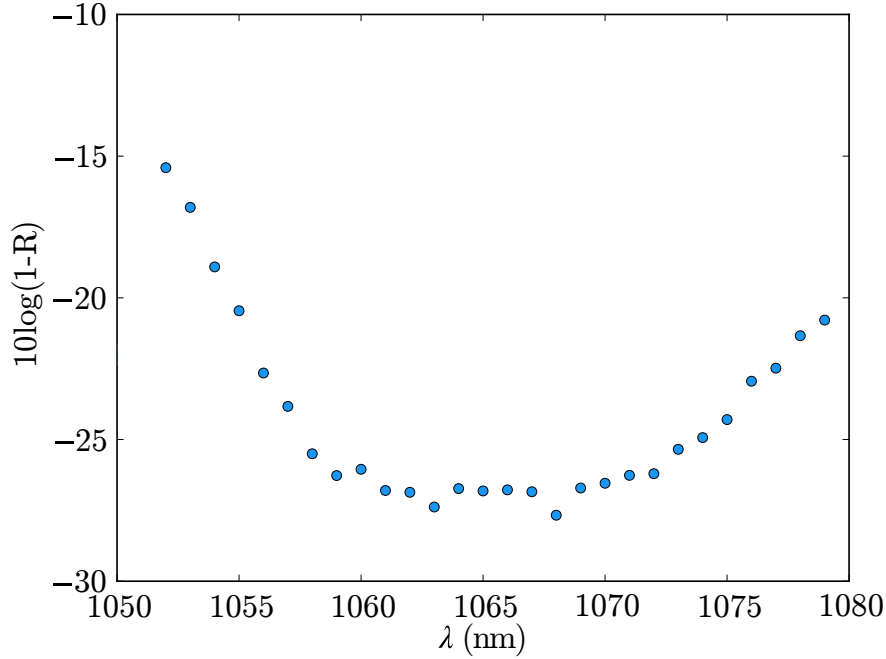


Fig. 2.28 Mesures de réflectivité grâce à la mise en cavité d'une membranes, dont les paramètres sont : un pas du cristal de 725 nm, un rayon de trous de 196 nm et une épaisseur de 267 nm.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mené une étude approfondie des différents mécanismes physiques à l'oeuvre dans un cristal photonique membranaire. Après avoir déterminé la région utile des paramètres pour un fonctionnement en régime spéculaire, nous avons pu déterminer les paramètres les plus propices pour le développement d'un réflecteur large bande de haute réflectivité centré à 1064 nm, grâce à la méthode RCWA. Dans un deuxième temps, nous avons mis en oeuvre des simulations FDTD pour discuter des écarts possibles entre le système réel final et les simulations RCWA. Cette discussion a porté sur la taille du waist optique, la taille finie du cristal photonique, ainsi que sur l'influence de la conicité des trous de gravure. Puis, après avoir exposé le procédé de fabrication de tels cristaux, nous avons présenté des spectres de réflectivité mesurés, qui sont en très bon accord avec les prédictions numériques. Ainsi, partant d'une membrane non structurée dont la réflectivité n'excède pas 70%, nous avons développé un cristal photonique à deux dimensions présentant une réflectivité aussi grande que 99.78% à 1.064 μm . La mise en cavité d'une telle membrane a permis d'obtenir une finesse supérieure à 2500. Pour un flux moyen de photons incidents de 0.6×10^{16} photon/s (1 mW), la sensibilité de mesure correspondante sur les déplacements du résonateur est $\delta x_{min} = 3.25 \times 10^{-19}$ m. Cette valeur, comme nous le verrons à la fin du prochain chapitre, est amplement suffisante pour observer le bruit thermique du système et, en principe, pour observer ses fluctuations de point zéro. Ces cristaux photoniques membranaires ont donc toutes les propriétés optiques nécessaires pour le développement de nos expériences d'optomécanique.

Chapitre 3

Conception et caractérisation mécanique du résonateur

3.1 Développement de la géométrie

Au cours de ma thèse, deux types de membranes ont été utilisées, les premières sont des membranes tambours, qui ont principalement servi pour la caractérisation optique, et les secondes sont des membranes suspendues à des supports par 4 ponts. Le

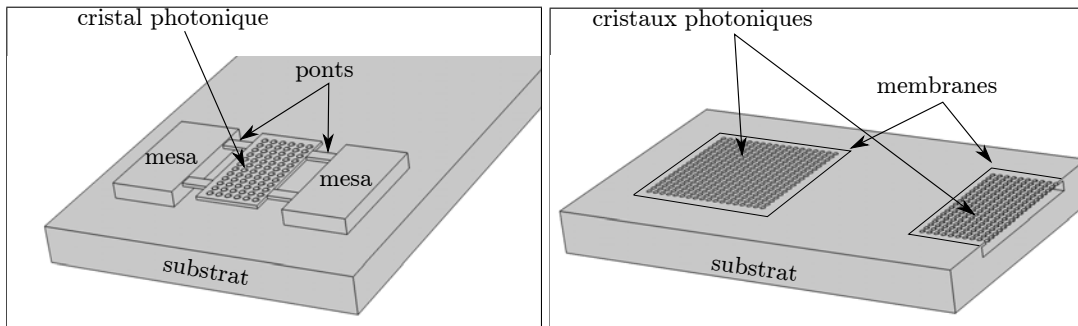


Fig. 3.1 Schéma des deux géométries de membrane utilisées. À gauche membrane à cristal photonique suspendue par quatre ponts, à droite des membranes à cristal photonique à géométrie tambour.

premier critère pour la conception géométrique de nos résonateurs est la minimisation de leur masse, afin d'augmenter les fluctuations de point zéro. Le second critère est l'obtention de résonateurs de plus grand facteur de qualité mécanique possible. Comme nous l'avons vu au chapitre 1, pour pouvoir atteindre des températures auxquelles les effets quantiques deviennent prédominants, nous avons besoin de combiner des techniques de cryogénie classique et de refroidissement actif. Ces refroidissements actifs tel le refroidissement laser, ou le refroidissement par friction froide, couplent un mode mécanique avec un bain thermique de température nulle et peuvent ainsi extraire son énergie. Cependant, ce couplage introduit un amortissement sur le résonateur et diminue donc son facteur de qualité. Réduire d'un facteur 10 la température impose de réduire le facteur de qualité d'un facteur 10 (voir chapitre 4). Il est donc essentiel d'avoir des structures ayant de très hauts facteurs de qualité mécanique. Lors de nos premiers

essais de fabrication, les membranes développées souffraient d'un faible facteur de qualité mécanique avec seulement $Q \simeq 500$. Ce chapitre décrit comment, en améliorant la géométrie et en jouant à la fois sur la température et la tension dans le matériau, nous avons pu atteindre des facteurs de qualité de l'ordre de 10^4 .

Dans un premier temps, nous allons présenter les différents mécanismes de dissipation associés aux résonateurs mécaniques de petites tailles, puis présenter les mesures de facteur de qualité pour différentes géométries optimisées selon les critères précédents. Nous présenterons ensuite une étude énergétique permettant de prendre en compte l'introduction de contraintes dans le résonateur. Comme ces dernières permettent d'augmenter l'énergie stockée dans le résonateur sans ajouter de dissipation, elles permettent d'augmenter le facteur de qualité mécanique. En outre, cette étude montre clairement que les membranes doivent avoir un comportement non-linéaire aux fortes excitations. Ce comportement a bien été observé et nous décrirons une série d'expériences portant sur ces non-linéarités dans la dernière partie de ce chapitre.

3.1.1 Etude des mécanismes de perte

Les membranes que nous avons fabriquées et étudiées sont de tailles et de géométries diverses. Cependant, la forme globale reste la même : un cristal photonique percé dans une membrane de quelques dizaines de μm de côté et de quelques centaines de nm d'épaisseur. Elles sont donc sujettes à un certain nombre de mécanismes de pertes référencés comme étant les principales sources de dissipation dont souffrent les résonateurs mécaniques miniaturisés. Nous allons les détailler dans ce paragraphe.

Le facteur de qualité mécanique rend compte de la capacité d'un résonateur à conserver son énergie mécanique et quantifie donc son couplage avec l'environnement. Il est défini comme le rapport entre son énergie mécanique totale et l'énergie qu'il dissipe au cours d'une période d'oscillation, soit :

$$Q = \frac{U_{\text{totale}}}{\Delta U} \quad (3.1.1)$$

Si nous notons ΔU_i l'énergie dissipée par le canal de pertes i , alors le facteur de qualité s'écrit, en fonction de l'ensemble des canaux de pertes comme :

$$Q^{-1} = \frac{\sum_i \Delta U_i}{U_{\text{totale}}} = \sum_i Q_i^{-1} \quad (3.1.2)$$

Nous voyons donc que le facteur de qualité mécanique est limité par le processus dissipant le plus d'énergie. Une étude systématique de tous les mécanismes de pertes est nécessaire pour estimer le facteur de qualité total et ainsi, pour identifier les processus risquant de limiter les performances de nos structures. Les mécanismes de pertes sont communément divisés en deux catégories : les pertes extrinsèques, qui dépendent de l'environnement ou de la géométrie et les pertes intrinsèques, qui dépendent de phénomènes liés à la nature et aux propriétés des matériaux.

Pertes extrinsèques

Parmi les sources de tels mécanismes de perte, on trouve l'amortissement gazeux, les pertes par ancrage, ou encore des pertes liées aux états de surface du résonateur.

L'amortissement gazeux

Lorsqu'un résonateur vibre, celui-ci interagit avec les molécules du gaz environnant, entraînant une perte d'énergie. La description de ces interactions dépend fortement du rapport entre le libre parcours moyen d'une molécule de gaz et la taille caractéristique du résonateur. Le nombre de Knudsen permet de quantifier les différents régimes correspondants :

$$K_n = \frac{\lambda}{l}, \quad (3.1.3)$$

Où l est une des dimensions latérales de la membrane (soit quelques dizaines de μm), et λ le libre parcours moyen d'une molécule d'air donné par :

$$\lambda = \frac{k_b T}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 P}. \quad (3.1.4)$$

Il est connu que pour un nombre de Knudsen inférieur à 0.01, le gaz peut être considéré comme un fluide newtonien continu, décrit par l'équation de Navier-Stokes [59]. On parle alors de régime visqueux, qui pour notre système correspond à des pressions supérieures à 10^4 Pa. Quand le nombre de Knudsen est supérieur à 10, les molécules de gaz interagissent avec le résonateur indépendamment les unes des autres et il faudra alors utiliser le cadre défini par la mécanique statistique de la théorie cinétique des gaz. Pour notre système, ce régime correspond à des pressions inférieures à 10^1 Pa, on parle alors de régime moléculaire libre. Entre ces deux valeurs, le régime n'est pas bien défini et les comportements asymptotiques ont des effets concomitants. Nous allons brièvement décrire ces différents régimes, pour en extraire la dépendance du facteur de qualité mécanique en fonction de la pression.

Le rayonnement acoustique :

Supposons que l'onde acoustique rayonnée ait une longueur d'onde petite devant la longueur caractéristique des déformations de la surface. On peut alors considérer que chaque élément de surface de l'objet rayonne dans l'air une onde plane [60]. Le flux d'énergie moyen de l'onde émise vaut $c \rho_{\text{air}} \overline{v^2}$, où ρ_{air} représente la masse volumique de l'air, c la vitesse du son et $\overline{v^2}$ la vitesse quadratique moyenne de l'onde dans l'air. On s'intéresse au flux d'énergie au niveau de la surface où la vitesse dans l'air est égale à celle du résonateur. La vitesse instantanée $\vec{v}(\vec{r}, t)$ de la surface du miroir au point \vec{r} se déduit de la décomposition modale (voir Chapitre 1) :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \sum_n \dot{a}_n(t) \vec{u}_n(\vec{r}). \quad (3.1.5)$$

La puissance totale rayonnée \mathcal{P} par la surface du miroir vaut :

$$\mathcal{P} = c \rho_{\text{air}} \int_{\mathcal{S}} d^2 r \overline{v^2} = c \rho_{\text{air}} \sum_n \overline{|\dot{a}_n(t)|^2} \int_{\mathcal{S}} d^2 r |\vec{u}_n(\vec{r})|^2, \quad (3.1.6)$$

où on a utilisé l'orthogonalité des modes propres¹, \mathcal{S} représente toute la surface du

1. Formellement l'orthogonalité entre deux modes est définie comme l'intégrale sur tout le volume du produit de leurs déformations, mais pour tous les modes que nous étudions, le résonateur se déforme en bloc, ce qui signifie que la relation d'orthogonalité reste vraie lorsqu'on la restreint à une intégration surfacique.

résonateur, c'est-à-dire à la fois ses faces supérieures et inférieures. La puissance rayonnée se met alors sous la forme d'une somme de termes \mathcal{P}_n correspondant à la puissance dissipée par chaque mode acoustique indépendamment les uns des autres :

$$\mathcal{P}_n = c\rho_{\text{air}} \overline{|\dot{a}_n(t)|^2} \int_{\mathcal{S}} d^2r |\vec{u}_n(\vec{r})|^2. \quad (3.1.7)$$

L'amplitude a_n du mode n subit un amortissement lié à la dissipation d'énergie par l'onde acoustique rayonnée, avec un taux Γ_n^{air} pour le mode n défini par l'équation :

$$\mathcal{P}_n = M_n \Gamma_n^{\text{air}} \overline{|\dot{a}_n(t)|^2}, \quad (3.1.8)$$

où M_n est la masse du mode n (équation 1.2.3). On peut relier Γ_n^{air} à la déformation $\vec{u}_n(\vec{r})$ à l'aide de l'équation (3.1.7) :

$$\Gamma_n^{\text{air}} = c \frac{\rho_{\text{air}}}{\rho_{\text{InP}}} \frac{\int_{\mathcal{S}} d^2r |\vec{u}_n(\vec{r})|^2}{\int_V d^3r |\vec{u}_n(\vec{r})|^2}, \quad (3.1.9)$$

où on a utilisé la définition de la masse du mode en fonction de l'intégrale en volume des déformations $\vec{u}_n(\vec{r})$ du mode et de la masse volumique ρ_{InP} du phosphore d'indium. Pour calculer cette expression, il faut connaître la dépendance de la structure spatiale du mode selon l'épaisseur e du micro-miroir. Pour les modes propres étudiés et aux fréquences auxquelles on travaille, les modes correspondent en fait à des déplacements en bloc selon l'épaisseur du résonateur. L'intégrale selon l'épaisseur se simplifie et l'intégrale en volume se réduit au produit de l'épaisseur e par l'intégrale sur une surface du miroir (équation 1.2.3). L'expression de Γ_n^{air} devient :

$$\Gamma_n^{\text{air}} = \frac{2c}{e} \frac{\rho_{\text{air}}}{\rho_{\text{InP}}}, \quad (3.1.10)$$

où le facteur 2 correspond à la prise en compte du rayonnement des deux faces de l'oscillateur.

La vitesse du son c étant indépendante de la pression [61], la dépendance de Γ_n^{air} en fonction de la pression P n'apparaît qu'à travers la masse volumique ρ_{air} de l'air selon la formule

$$\rho_{\text{air}} = \frac{M_{\text{air}}}{RT} P, \quad (3.1.11)$$

où M_{air} est la masse molaire de l'air et R la constante des gaz parfaits. Comme le taux d'amortissement total Γ_n du mode est la somme de Γ_n^{air} et d'autres sources d'amortissement a priori indépendants de la pression, on s'attend à une dépendance affine de la largeur des pics de résonance du miroir avec la pression. En réalité la longueur d'onde acoustique rayonnée est supérieure à la déformation de surface du résonateur par environ un ordre de grandeur. La principale conséquence est que les ondes ne sont plus planes mais sphériques, un facteur géométrique est donc à rajouter sur le taux de dissipation calculé. D'après ce modèle, on s'attend à un amortissement complètement indépendant de la structure du mode propre. Avec les masses volumiques $\rho_{\text{air}} = 1,3 \text{ kg/m}^3$ et $\rho_{\text{InP}} = 4810 \text{ kg/m}^3$ et une épaisseur $e = 0.260 \mu\text{m}$, on trouve un taux d'amortissement dû au rayonnement acoustique de l'ordre de $\Gamma_n^{\text{air}}/2\pi = 100 \text{ kHz}$

à la pression atmosphérique.

Le régime moléculaire libre :

Dans ce régime intermédiaire, aussi appelé région de Knudsen, l'amortissement est causé par les collisions entre le résonateur et les molécules, mais celles-ci n'interagissent pas entre elles du fait de la faible densité de gaz. Ce régime domine lorsque le libre parcours moyen d'une molécule est grand devant les dimensions caractéristiques du résonateur, typiquement pour $K_n > 10$. Dans ce cas, la force de frottement peut être calculée en moyennant l'énergie cinétique du gaz. Pour le premier mode d'une poutre en flexion le facteur de qualité s'exprime alors comme [62, 63, 64] :

$$Q_{mol} = \frac{3}{8\sqrt{6}} \frac{a_n^2}{P} \frac{e^2}{L^2} \sqrt{\frac{\pi E \rho R_0 T}{M_{gaz}}} \quad (3.1.12)$$

Où M_{gaz} est la masse molaire du gaz ($28.964 \times 10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}$ pour l'air), R_0 la constante des gaz parfaits, E et ρ respectivement le module d'Young et la densité du matériau constituant le résonateur, T la température et P la pression du gaz. Dans cette région, le facteur de qualité sera donc inversement proportionnel à la pression du gaz. On peut aussi noter que lors de la miniaturisation des résonateurs, le rapport e/L^2 étant constant, le facteur de qualité de ce régime sera inversement proportionnel à l'épaisseur du dispositif.

Le régime intrinsèque :

Dans ce régime, la pression est tellement faible que les pertes associées à l'interaction entre le résonateur et le gaz sont négligeables devant les pertes intrinsèques du matériau. C'est bien évidemment dans ce régime là que nous souhaitons nous placer pour la suite de nos travaux.

Squeeze layer damping :

Dans la région moléculaire, donc pour des pressions relativement faibles de gaz, et lorsque le résonateur est proche d'une surface rigide, ce qui sera notre cas, une autre force apparaît. Cette force additionnelle survient quand la distance séparant la membrane de la surface est plus petite que le libre parcours moyen d'une molécule de gaz, en effet le déplacement de la membrane va faire varier le volume défini entre celle-ci et la paroi, ce qui va augmenter le taux de collision entre la membrane et les molécules et pourra être considéré comme une variation locale de pression. Il nous faut considérer la phase de la réponse du gaz : en effet si celle-ci est en phase avec le mouvement, le gaz agira comme un ressort parfait, il en résultera un changement de fréquence des résonances de la membrane. Si la réponse du gaz est en quadrature par rapport au mouvement de la membrane, alors l'effet principal sera un amortissement supplémentaire du résonateur. Sujilen et al. ont développé un modèle analytique pour décrire ce problème se basant sur la cinétique des gaz [65]. Ils arrivent à exprimer la

force s'exerçant sur la membrane due à la compression du gaz comme :

$$F_{squeeze} = -\frac{PA}{d} \frac{i\omega\tau}{1 + i\omega\tau}, \quad (3.1.13)$$

avec A la surface du résonateur, d la distance séparant le résonateur de la paroi, P la pression, ω la pulsation du résonateur et τ la constante de temps de la diffusion moléculaire pour homogénéiser la pression entre la cavité et l'extérieur. Cette force comporte bien deux composantes, une en phase avec le mouvement, $Re(F_{squeeze})$, et une en quadrature de phase, $Im(F_{squeeze})$. Lorsque $\omega\tau \ll 1$ nous avons bien un amortissement pur tandis que lorsque $\omega\tau \gg 1$, la force se manifeste comme une force élastique sans amortissement. Pour déterminer τ , les auteurs ont considéré une marche aléatoire, dérivée du mouvement brownien d'une particule dans un gaz de statistique boltzmannienne, ce qui leur a permis d'obtenir :

$$\tau = \frac{8}{\pi^3} \frac{A}{d\langle v \rangle} \quad (3.1.14)$$

où $\langle v \rangle = \sqrt{8k_B T / \pi m}$ est la vitesse moyenne des molécules de gaz et m est la masse moléculaire. Avec les dimensions de notre problème, nous avons $\tau \simeq 1.1 \cdot 10^{-7}$, ce qui, au vu de la fréquence angulaire de la membrane, nous place dans le régime intermédiaire de $\omega\tau \simeq 1$: les deux effets vont donc se manifester. D'après [65], nous aboutissons à l'expression du facteur de qualité associé aux pertes par compressions :

$$Q_{squeeze} = a_n^2 \frac{e^2}{L^2} \sqrt{\frac{E\rho}{12}} d \frac{1}{\tau} (1 + (\omega\tau)^2) \frac{1}{P}. \quad (3.1.15)$$

Ce qui nous permet d'exprimer la rapport de $Q_{squeeze}/Q_{mol}$:

$$\frac{Q_{squeeze}}{Q_{mol}} = 2 \frac{d^2 \pi^2}{A} (1 + (\omega\tau)^2). \quad (3.1.16)$$

Nous voyons donc que lorsque la surface du résonateur est inférieure à $4d^2\pi^2$ dans le régime moléculaire, les pertes du résonateur sont dominées par l'effet de compression de la couche de gaz entre le résonateur et la paroi, ce qui est notre cas, avec $Q_{squeeze}/Q_{mol} \simeq 0.1$. Il paraît intéressant de déterminer la pression nécessaire pour atteindre le régime intrinsèque et ne plus être limité par le régime de compression. Figure 3.2 est tracé le facteur de qualité associé. Nous pouvons estimer graphiquement le pression limite supérieure de la pression critique en supposant arbitrairement que le facteur de qualité intrinsèque des membranes valent 10^6 , ce qui nous donne une pression de l'ordre de 10^{-2} mbar.

Pertes par ancrage

Un autre mécanisme de perte extrinsèque provient des pertes par ancrage qui sont liées à la géométrie du résonateur et indépendantes du type de matériau utilisé. Celles-ci proviennent du rayonnement acoustique du résonateur dans le substrat donc dépendent fortement de la géométrie des attaches ainsi que celle du mode considéré. En effet, les déplacements du résonateur peuvent créer au niveau des attaches un déplacement qui rayonnera une partie de l'énergie mécanique dans le substrat et qui sera perdue.

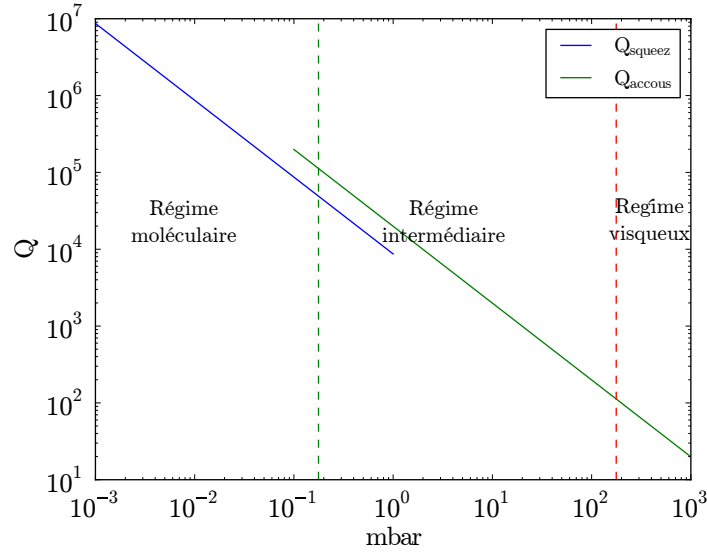


Fig. 3.2 Représentation des différents facteurs de qualité associés aux trois régimes de l'amortissement gazeux.

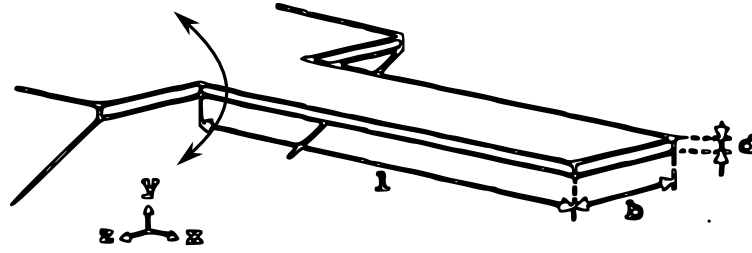


Fig. 3.3 Schématisation des pertes par ancrage.

Par exemple, pour un cantilever, Photiadis et Judge dans [66] ont développé les expressions de la force et du couple s'exerçant sur le substrat à cause des déplacements du résonateur. Ils correspondent respectivement de la dérivée seconde et troisième de l'amplitude de déplacement. Ceci leur a permis, moyennant certaines approximations sur les caractéristiques géométriques du cantilever et de la longueur d'onde acoustique, de dériver l'expression du facteur de qualité mécanique [66].

Cependant, des membranes suspendues par des ponts, dont nous voulons optimiser le développement, ne peuvent se ramener simplement à des cantilevers. En effet, la position des ponts le long de la membrane risque d'influer énormément sur la forme du mouvement des ponts qui ne sera plus une simple flexion, mais un mélange de flexion, de torsion et d'extension.

Pour prendre en compte ce type d'effets, nous allons procéder à des simulations par éléments finis. Nous allons pour cela supposer que la totalité de l'énergie des vibrations transmises au support est définitivement perdue. Ceci peut être simulé, dans le logiciel de calcul par éléments finis COMSOL, en attribuant au matériau du support (ou "mésa") les propriétés d'une "couche parfaitement accordée" ou Perfectly Match Layer (PML). Cette PML est, en fait, un matériau avec un module d'Young ima-

ginaire pur, qui absorbe tout rayonnement incident. Celle-ci permet de calculer une borne inférieure au facteur de qualité associée aux pertes d'énergie par les attaches. La simulation calcule les modes propres de la structure et leur valeurs propres qui sont des nombres complexes dont la partie réelle est la fréquence de résonance, et la partie imaginaire l'amortissement correspondant aux fuites d'énergie par les attaches. La borne inférieure du facteur de qualité associé aux pertes par ancrages est donc le rapport entre la partie réelle et la partie imaginaire de ces valeurs propres.

État de surface

Les pertes dues aux états de surface doivent être considérées avec attention pour les résonateurs miniatures dans lesquels le rapport surface/volume est considérable. Il s'agit là principalement d'observations expérimentales [67, 68]. Les origines en sont diverses :

- Fine couche d'oxyde en surface du résonateur
- Rugosité
- Adsorption de contaminants
- Réorganisation des défauts
- Interaction des ondes de surface et des ondes acoustiques

Ces pertes sont difficiles à prédire et à simuler. Elles peuvent parfois expliquer les différences d'un échantillon à l'autre ou bien la dégradation d'un échantillon au cours du temps.

Pertes intrinsèques

Amortissement thermoélastique

L'amortissement thermoélastique est dû aux variations de volume du résonateur, qui créent des changements de température inhomogènes dans le matériau. En effet, pour un matériau thermoélastique, la compression locale induit une augmentation de la température locale, alors qu'inversement, une dilatation locale induit une baisse de la température. Ces gradients locaux créent des flux de chaleur qui mettent le résonateur hors de son état d'équilibre. Le couplage entre la déformation et les gradients de température est à l'origine du phénomène de dissipation, qui incite le système à relaxer vers son état d'équilibre. Lorsque l'on considère un mode de flexion d'une poutre vibrante, nous pouvons réaliser que les parties supérieures et inférieures subissent des contraintes opposées, et donc, qu'un gradient de température va se former dans l'épaisseur, comme illustré Figure 3.4. Nous pouvons donc en conclure que pour certains matériaux dont le

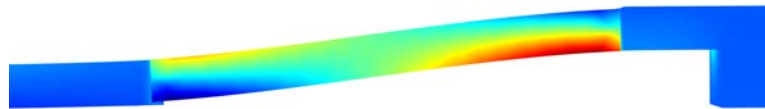


Fig. 3.4 Illustrations des gradients de température créés par l'effet thermoélastique lors de la flexion des ponts.

temps de relaxation des phonons thermiques est grand devant la période d'oscillation, le solide ne peut s'équilibrer thermiquement, et ne dissipe donc que très peu d'énergie :

on parle de vibration adiabatique. De même, lorsque la période d'oscillation est très faible devant le temps de relaxation des phonons thermiques, le solide se trouve en permanence dans son état d'équilibre thermique, on parle alors de vibrations isothermes. Les pertes par effet thermoélastique vont jouer un rôle dans les systèmes dans lesquels le temps de relaxation et la période d'oscillation sont comparables.

Ce problème a été étudié par Clarence Zener qui a développé un modèle pour des poutres rectangulaires en flexion, [69, 70], basé sur une extension de la loi de Hooke faisant intervenir la contrainte σ ($N.m^{-2}$), la déformation ε , ainsi que leur dérivée temporelle $\dot{\sigma}$ ($N.s^{-1}.m^{-2}$) et $\dot{\varepsilon}$ (s^{-1}) :

$$\sigma + \tau_\varepsilon \dot{\sigma} = E_R(\varepsilon + \tau_\sigma \dot{\varepsilon}) \quad (3.1.17)$$

Avec τ_ε et τ_σ respectivement les temps de relaxation de contrainte à déformation constante et de relaxation de la déformation à contrainte constante, et E_R le module d'Young après relaxation.

La Figure 3.5 présente le modèle mécanique équivalent à cette équation, qui est com-

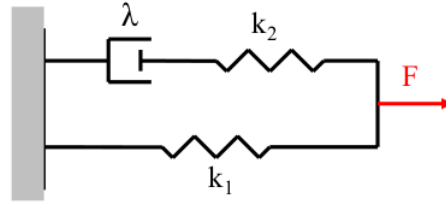


Fig. 3.5 Modèle mécanique équivalent au modèle de Zener décrivant les effets thermoélastiques.

posées d'un ressort de raideur k_2 ($N.m^{-2}$) en série avec un module d'amortissement visqueux γ ($N.s.m^{-2}$), disposé en parallèle d'un second ressort de raideur k_1 ($N.m^{-2}$). Nous pouvons relier ces paramètres à τ_σ , τ_ε et E_R de la façon suivante :

$$E_R = k_1, \quad \tau_\varepsilon = \frac{\gamma}{k_2}, \quad \tau_\sigma = \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} \gamma \quad (3.1.18)$$

Nous allons pour la suite considérer la déformation et la contrainte comme harmoniques :

$$\sigma = \sigma_0 \exp(j\omega t), \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \exp(j\omega t). \quad (3.1.19)$$

Nous pouvons donc réécrire l'équation 3.1.17 comme :

$$\sigma_0(1 + j\omega\tau_\varepsilon) = \varepsilon_0 E_R(1 + j\omega\tau_\sigma). \quad (3.1.20)$$

Nous voyons donc équation 3.1.20 que la contrainte σ_0 et la déformation ε_0 sont reliées par un module d'Young complexe, qui signifie que l'évolution de la déformation vis-à-vis de la contrainte appliquée est déphasée :

$$E_0(\omega) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = E_R \frac{1 + j\omega\tau_\sigma}{1 + j\omega\tau_\varepsilon}. \quad (3.1.21)$$

Nous pouvons donc en déduire le facteur de qualité mécanique associé aux pertes thermoélastiques, celui-ci étant égale au rapport de l'énergie totale sur l'énergie dissipée lors d'une période d'oscillation, et qui est égale à la partie réelle du module d'Young sur sa partie imaginaire à la pulsation propre ω_0 , ce qui nous donne :

$$Q_{TED} = \frac{1}{\Delta E} \frac{1 + (\omega_0 \tau)^2}{\omega_0 \tau}, \quad (3.1.22)$$

où $\Delta E = \sqrt{\frac{\tau_\sigma}{\tau_\varepsilon}} - \sqrt{\frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma}}$ et $\tau = \sqrt{\tau_\sigma \tau_\varepsilon}$ est le temps de relaxation effectif. D'après cette expression Q_{TED} présente un minimum pour $\omega_0 \tau = 1$, ce qui est en accord avec la phénoménologie invoquée en prologue.

Afin de déterminer les paramètres τ et ΔE , il est nécessaire de considérer la contribution de la dilatation thermique sur la déformation dans la loi de Hooke :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha T. \quad (3.1.23)$$

Ainsi que l'équation de conduction de la chaleur :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\kappa}{\rho C_p} \nabla^2 T - \frac{E \alpha T_0}{\rho C_p} \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (3.1.24)$$

avec α (K^{-1}) le coefficient de dilatation thermique, κ ($W.m^{-1}.K^{-1}$) le coefficient de conduction thermique, C_p ($J.kg^{-1}.K^{-1}$) la chaleur spécifique à pression constante, ρ ($kg.m^{-3}$) la masse volumique et T_0 (K) la température de référence. La résolution de ce système formé par les équations 3.1.23 et 3.1.24 nous permet de trouver l'expression du facteur de qualité thermoélastique dans le cas d'un matériau isotrope selon la théorie de Zener :

$$Q_{TED} = \frac{\rho C_p}{\alpha^2 T_0 E} \frac{1 + (\omega_0 \tau)^2}{\omega_0 \tau} \quad (3.1.25)$$

avec cette fois $\tau = \frac{r^2}{\pi^2 \chi}$, où χ est le coefficient de diffusion thermique et r la longueur caractéristique sur laquelle se développent les gradients de température [71].

	InP
ρ	4.81×10^3 (kg)
α	4.6×10^{-6} (K^{-1})
C_p	311 (J/kg/K)
κ	68 (W/m/K)

Pour illustrer la dépendance des pertes thermoélastiques en fonction de la fréquence dans nos simulations par éléments finis, nous avons choisi de faire varier le paramètre de conductivité thermique κ , qui, au vu de l'expression 3.1.25, peut être ramené à une variation de fréquence. Cela permet de travailler toujours avec le même mode et avec une géométrie fixe de membrane. La Figure 3.6 représente la variation du facteur de qualité Q_{TED} simulé pour des valeurs de κ variant de 10^{-5} à 10^2 W/(m.K) pour le mode fondamentale de fréquence ~ 2 MHz, qui ramené en fréquence, correspond à une variation de 0.1 MHz à 100 GHz. Les points sont le résultat de ces simulations pour une membrane soutenue par quatre ponts. La courbe pleine correspond aux facteurs de

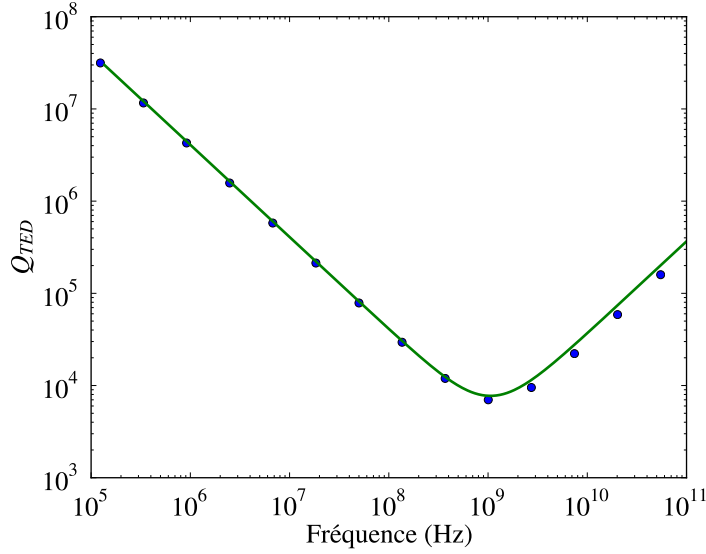


Fig. 3.6 Variation du facteur de qualité mécanique associé aux dissipations thermoélastiques en fonction de la fréquence.

qualité donnés par l'expression 3.1.25, pour les paramètres de l'InP tabulés ci-dessus, et avec r , dimension sur laquelle se développe le gradient thermique, qui est prise comme égale à l'épaisseur de la membrane, soit 260 nm. Les simulations par éléments finis et la formule 3.1.25 sont en très bon accord pour cette valeur de r . La valeur minimale de Q_{TED} est de 12500, valeur obtenue pour des fréquences de l'ordre du GHz. Il apparaît donc que les pertes thermoélastiques ne seront pas un facteur limitant pour nos membranes pour lesquelles les fréquences de résonance attendues pour les modes peu élevés sont inférieures à 10 MHz.

Amortissement par interaction phonon-phonon

Pour un matériau de faible conductivité électrique, un autre mécanisme de dissipation est l'interaction entre l'onde acoustique et les phonons thermiques, on parle alors d'interaction phonon-phonon. Celle-ci diffère notablement de l'effet thermoélastique pour lesquels on considèrerait les phonons thermiques générés par les déformations. Ici les phonons thermiques considérés sont ceux du bain thermique. En effet, lors de la propagation de l'onde acoustique dans le milieu, la répartition locale des phonons thermiques est perturbée, la population de phonons dissipe une partie de l'énergie mécanique pour se réajuster à l'état d'équilibre. Une estimation du facteur de qualité associé à cette dissipation est donnée dans [72] :

$$Q_{ph} \simeq \frac{\rho v^2}{CT\gamma^2} \left[\frac{\omega\tau_{ph}}{1 + (\omega\tau_{ph})^2} \right]^{-1}, \quad (3.1.26)$$

où v est la célérité du son, γ la constante de Gruneisen caractérisant la non-harmonicité du réseau cristallin en vibration, et τ_{ph} le temps de relaxation d'un phonon. Ce temps

de relaxation peut être calculé comme :

$$\tau_{ph} = \frac{3\kappa}{\rho C_p v_D^2}, \quad (3.1.27)$$

où ν_D est la vitesse du son de Debye, définie par l'équation suivante :

$$\frac{3}{v_D^3} = \frac{1}{v_l^3} + \frac{2}{v_t^3}, \quad (3.1.28)$$

avec v_l et v_t respectivement la vitesse du son longitudinale et transverse dans le matériau, données pour un matériau amorphe :

$$v_l = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2}, \quad v_l = 1.65v_t. \quad (3.1.29)$$

Ce qui nous donne, pour notre résonateur, un temps de relaxation des phonons de l'ordre de 10^{-12} s, ce qui, au vu des fréquences de résonance, nous place dans le régime $\omega\tau \ll 1$ nommé le régime d'Akheiser [73], et qui à 300 K nous donne des facteurs de qualité $Q \sim 10^6$.

Nous avons passé en revue dans cette partie les principaux mécanismes de pertes associés aux nano-résonateurs, et après en avoir fait l'étude, aucun ne devrait limiter les facteurs de qualité mécanique sous condition d'être à une pression suffisamment faible (10^{-2} mbar). A priori, les seuls effets à prendre en compte dans le développement des nano-membranes sont les pertes par ancrage. Nous allons, dans la prochaine section, présenter les différentes géométries de résonateurs optimisés par simulations ainsi que les mesures expérimentales des facteurs de qualité de ces structures fabriquées.

3.1.2 Caractérisation mécanique des échantillons

Description du dispositif de mesure

Pour mesurer les déplacements de nos membranes et donc pouvoir caractériser leur comportement dynamique, nous avons développé un banc de mesure dans la configuration d'un interféromètre de Michelson. Le principe est qu'un des miroirs de cet interféromètre est notre résonateur mécanique. Ainsi, son déplacement vient modifier le chemin optique de l'un des bras. La Figure 3.7 montre l'ensemble du montage expérimental et le dispositif d'acquisition qui nous ont servi à observer et caractériser la réponse mécanique des nano-membranes à cristal photonique. Le montage est placé sur une table optique *TMC* avec des pieds à suspension pneumatique active, ce qui assure une bonne isolation vis-à-vis des vibrations du sol. Le montage est constitué d'une source laser commerciale Mephisto Nd :Yag, émettant un faisceau à 1064 nm. Celui-ci passe par deux lames, demi et quart d'onde, qui assurent une polarisation rectiligne, pour ensuite passer par un isolateur de Faraday et empêcher ainsi tout retour de lumière vers le laser. Le faisceau passe ensuite par une lentille convergente l1, puis par une lame demi-onde juste avant le premier cube séparateur de polarisation (CSP1) de manière à pouvoir injecter 50% de la puissance incidente dans chacun des deux bras de l'interféromètre. Le bras au bout duquel l'échantillon est placé est composé d'une lame

quart d'onde assurant la transmission du faisceau lors de son passage en retour à travers le CSP1, ainsi que deux miroirs formant une baïonnette pour le réglage de l'angle et de la position horizontale et verticale du faisceau incident. Finalement, le faisceau passe par un objectif de microscope (Zeiss A-Plan $\times 10/0.25$) afin d'être focalisé sur les membranes à tester qui sont placées dans une enceinte à vide. L'enceinte à vide que nous utilisons est un cryostat ST-500 de la société Janis, qui nous permet, en plus des mesures à basse pression, d'étudier l'évolution de la réponse dynamique en fonction de la température (voir section 3.1.2). Le deuxième bras, lui, est composé d'une lame quart d'onde qui permet au faisceau retour d'être réfléchi par le cube séparateur de polarisation 1, et d'un miroir collé sur une cale piézoélectrique, formant l'oscillateur local qui permet l'asservissement à mi-frange de l'interféromètre. Une fois recombinaison après le deuxième passage dans le CSP1, les deux faisceaux de polarisations orthogonales, passent par une lame demi-onde orientée à 45° et un deuxième cube séparateur de polarisation (CSP2), ce qui permet aux deux faisceaux d'interférer. Enfin, une lentille de courte focale vient focaliser les faisceaux recombinaison sur une photodiode (*Thorlabs PDA36A*). Pour enregistrer la réponse spectrale cohérente à une excitation, nous utilisons un analyseur de réseau dont le port de sortie contrôle une cale piézoélectrique sur laquelle est fixée notre échantillon dans l'enceinte à vide, et enregistre le signal électrique délivré par la photodiode. Pour asservir l'interféromètre, nous utilisons le signal délivré par la photodiode qui passe dans un boîtier d'asservissement nous permettant de créer un signal d'erreur qui, après avoir été amplifié, pilote la cale piézoélectrique de l'oscillateur local. Ce signal d'erreur est mis en forme pour maintenir une différence de marche entre les deux bras de $n\lambda/2$ avec n entier, cet asservissement dit "à mi frange" permet d'avoir la meilleure sensibilité puisque le point de fonctionnement se trouve au maximum de la pente sur la frange d'interférence. De plus, pour pouvoir cartographier nos échantillons, une caméra USB infrarouge digitale est placée derrière le deuxième miroir formant la baïonnette.

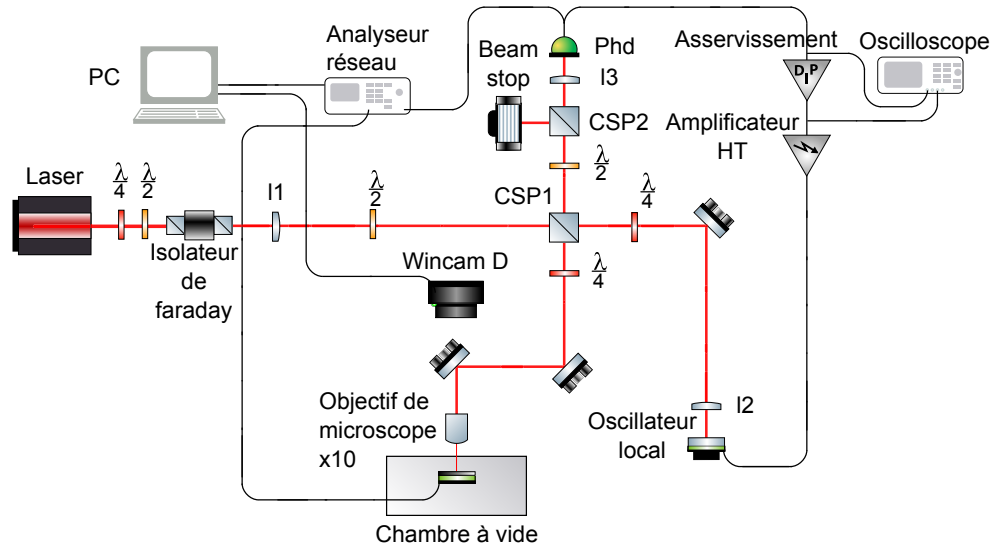


Fig. 3.7 Schéma du dispositif de mesures et d'acquisition des déplacements des nano-membranes.

Caractérisation modale des échantillons

A l'aide du dispositif décrit dans la section 3.1.2, nous avons dans un premier temps enregistré la réponse cohérente à une excitation pour une large gamme de fréquences afin d'identifier les différents modes mécaniques des structures (voir figure 3.8). Nous avons comparé le spectre obtenu avec les simulations faites par éléments finis, pour identifier les différents modes et avoir ainsi leurs caractéristiques mécaniques (fréquence, facteur de qualité). Les simulations pour ce type de géométrie nous

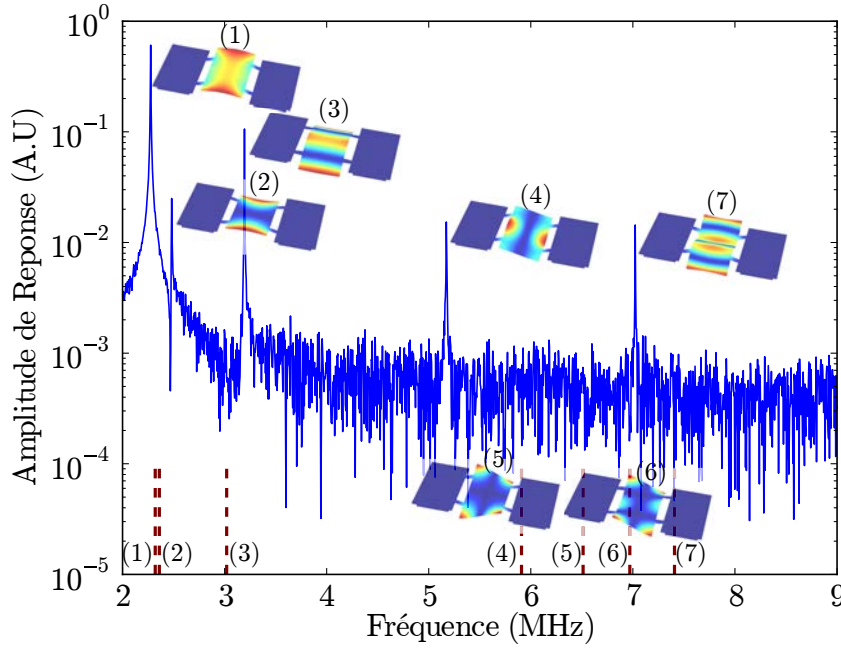


Fig. 3.8 Réponse caractéristique des nano-membranes à ponts. Les lignes pointillées représentent les fréquences des sept premiers modes calculées par simulations, auxquelles sont associées leurs formes.

prédissent 7 modes entre 2 et 9 MHz ; nous avons pu les identifier en correspondance avec la réponse spectrale. On peut voir cependant que les modes 5 et 6, prédits aux alentours de 6.5 et 6.8 MHz ne sont pas détectés par notre mesure (voir Figure 3.8). Ceci est attribué au faible recouvrement spatial entre le faisceau optique de mesure et la forme de ces deux modes. On peut noter également que, bien que l'excitation par cale piézoélectrique ne devrait exciter que les modes symétriques, nous arrivons tout de même à exciter les modes antisymétriques. Ceci peut être du à une réponse non symétrique de la cale piézoélectrique ou à un défaut de symétrie du résonateur.

La méthode du Ring Down

Le ring down est une méthode largement utilisée, qui consiste à mesurer le temps de décroissance de l'intensité lumineuse dans une cavité optique pour en mesurer les pertes. Selon le même principe, nous allons chercher à mesurer la constante de temps caractérisant l'évolution libre d'un mode mécanique depuis son régime forcé vers son état d'équilibre. Nous allons pour cela utiliser le banc de mesure détaillé dans la sec-

tion 3.1.2. Nous remplaçons l'analyseur de réseau par, d'une part, un générateur de signal délivrant une sinusoïde à la fréquence propre du résonateur pour l'excitation, et, d'autre part, un analyseur de spectre centré à la fréquence de résonance de la membrane en mode "0-span". Nous pouvons ainsi suivre l'évolution temporelle du signal. Ces deux appareils sont synchronisés en fréquence et reliés par un signal de trigg permettant le déclenchement de l'acquisition lorsque le signal d'excitation est coupé. Ce signal de trigg est un crêteau de 1 Hz délivré par un générateur basse fréquence. La mesure est répétée et moyennée cent fois par l'analyseur de spectre. Le mouvement d'un pendule amorti de pulsation ω_0 et d'amortissement Γ étant de la forme :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \phi) e^{-\Gamma/2t}, \quad (3.1.30)$$

la puissance de modulation à la fréquence ω_0 décroît donc comme $e^{-\Gamma t}$. La trace temporelle aura alors la forme caractéristique illustrée par la Figure 3.9, dont la pente $\alpha = 10\Gamma/\ln(10)$ du régime transitoire est liée au facteur de qualité mécanique par la formule :

$$Q = \frac{20\pi}{\ln(10)} \frac{\omega_0}{2\pi} \frac{1}{\alpha}. \quad (3.1.31)$$

La Figure 3.9 présente une courbe caractéristique d'une mesure dite de Ring Down, que l'on peut séparer en trois régions. La région 1 où l'on peut voir l'amplitude de la réponse mécanique à une excitation cohérente à sa fréquence de résonance (2.4514 MHz). La région 2 correspondant au retour à l'équilibre du résonateur où l'on voit la décroissance de l'amplitude de réponse qui est linéaire en échelle logarithmique. Quant à la région 3 on y voit le bruit de phase et d'intensité du faisceau optique de mesure. Cette courbe a été obtenue avec une membrane ayant des ponts de longueur $2\mu\text{m}$ et de largeur $0.5\mu\text{m}$ placés à $4.25\mu\text{m}$ de part et d'autre de la médiane de la membrane, dont le facteur de qualité mécanique vaut environ 3200.

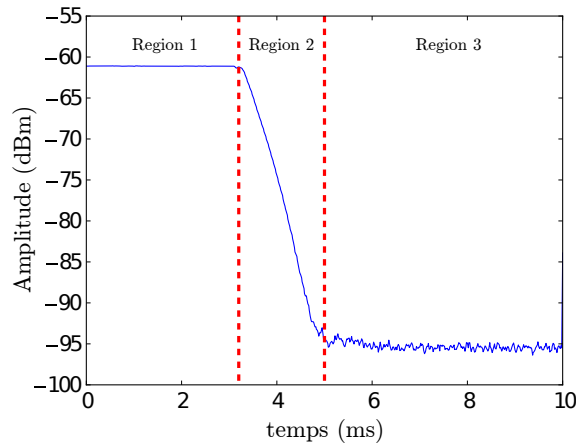


Fig. 3.9 Signal typique de Ring down, obtenu pour le mode de pont symétrique de fréquence 2.4514 MHz d'une membrane avec quatre ponts de $2\mu\text{m}$ de long et $0.5\mu\text{m}$ de large placés à $4.25\mu\text{m}$ de part et d'autre de la médiane de la membrane, ce qui correspond à un facteur de qualité d'environ 3200.

Résultats des mesures

Dans la première partie, nous avons fait un inventaire des différents mécanismes susceptibles de limiter la qualité des résonateurs mécaniques. Après application au cas d'une membrane en Phosphore d'Indium de dimension latérale de quelques dizaines de μm et d'épaisseur 0.26 nm, nous sommes arrivés à la conclusion qu'en dessous d'une pression de 10^{-2} mbar, le système pourrait en principe exhiber de très hauts facteurs de qualité mécanique, et ce, pour des fréquences de résonance dans le domaine du MHz. Pour obtenir de telles performances, il faut cependant trouver une géométrie qui minimiserait les pertes par ancrage. Ainsi, partant de résultats de simulations numériques nous avons dessiné différentes matrices de membranes à géométries variables pour tester expérimentalement la dépendance des pertes par les attaches. Le Laboratoire de Photonique et de Nano-structures a ensuite fabriqué ces structures, dont la procédure de fabrication est développée dans le chapitre 2. L'échantillon test comporte ainsi plusieurs matrices de membranes dont à chaque fois un paramètre géométrique est balayé. Une matrice est composée de membranes avec des ponts de $2\ \mu\text{m}$ de longueur et de $1\ \mu\text{m}$ de largeur, dont la position le long de la membrane est le paramètre varié. Puis deux autres matrices composées des membranes dont les ponts de $1\ \mu\text{m}$ et $0.5\ \mu\text{m}$ de large sont placés latéralement aux positions optimales trouvées par simulation, en faisant varier leur longueur de 2 à $12\ \mu\text{m}$. Après fabrication, nous avons caractérisé ces échantillons à l'aide du banc expérimental détaillé dans 3.1.2 et dans 3.1.2, nous permettant de mesurer les fréquences de résonance des modes ainsi que leur facteur de qualité mécanique. Nous avons ensuite cherché à confronter ces résultats avec les simulations par éléments finis, nous permettant d'identifier les différents modes mécaniques.

Translation des ponts :

Dans un premier temps, nous avons donc procédé à des simulations par éléments finis pour rendre compte des pertes par ancrage en fonction de la position des ponts le long de la membrane. Pour cela, nous avons utilisé la méthode des éléments finis proposée avec le logiciel COMSOL. Le schéma de la Figure 3.10 illustre la structure simulée, composée d'une membrane reliée au support par quatre ponts. Ce dernier est décomposé en deux parties : la couche supérieure, d'épaisseur égale à celle de la membrane, et la partie inférieure, épaisse, qui sert de base ou "mésa", et qui, comme décrit dans la section 3.1.1 a les propriétés d'une PML permettant de simuler les pertes par le support.

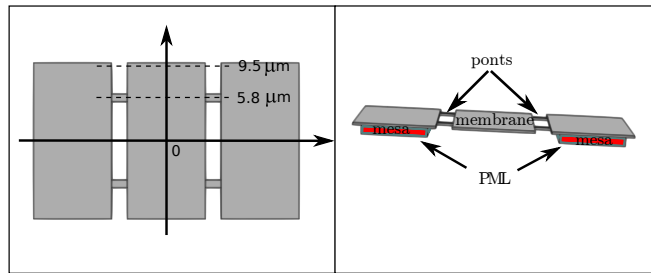


Fig. 3.10 Schéma des structures simulées par éléments finis.

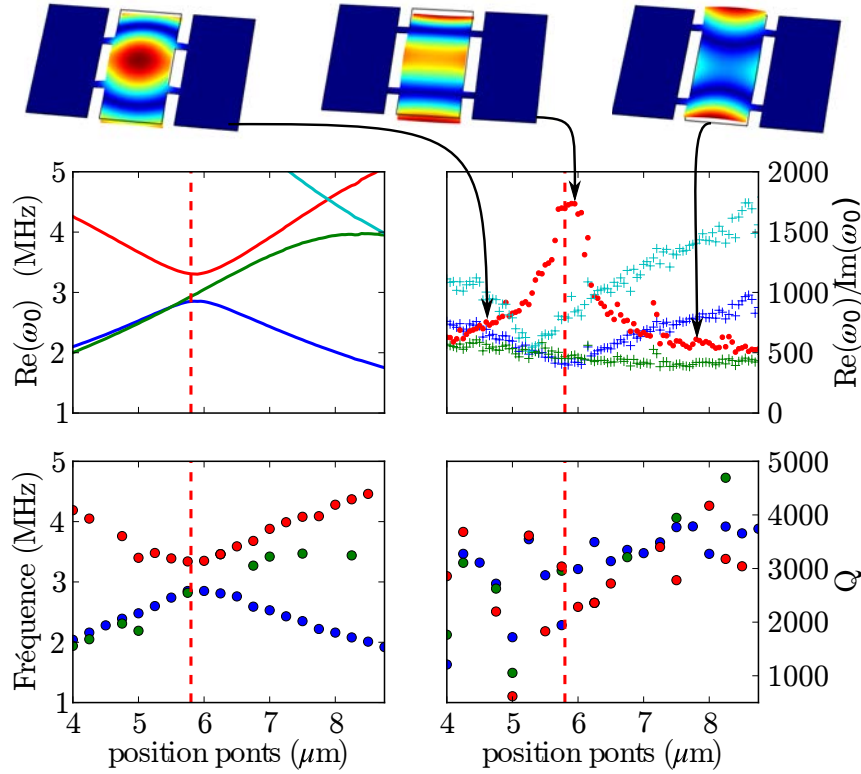


Fig. 3.11 Gauche : Simulation (haut) et mesures (bas) des fréquences de résonance pour les trois premiers modes mécaniques. Droite : Les facteurs de qualité correspondants. Ces données proviennent d'une membrane de $10 \times 20 \times 0.26 \mu\text{m}^3$ avec des ponts de $1 \times 2 \mu\text{m}^2$ dont la position le long de la membrane est variée de 4 à $9 \mu\text{m}$ par rapport à l'axe médian de la membrane, et ce, avec un pas de 250 nm .

Les graphiques en haut de la Figure 3.11 présentent les résultats de ces simulations, avec à gauche la variance de fréquence des 3 premiers modes, et à droite les facteurs de qualité qui leur sont associés. Nous avons identifié les 3 premiers modes grâce à leurs fréquences, qui ont un comportement spectral caractéristique en fonction de la position des ponts. En particulier, nous pouvons observer l'anti-croisement du mode symétrique de pont (s), correspondant à un déplacement global de la membrane hors plan, avec le mode (0,0) de la membrane. Par ailleurs, la figure montre la forme du mode (0,0), que l'on cherche à optimiser pour trois positions des ponts le long de la membrane. On voit que la forme du mode est conditionnée par les conditions aux limites imposées par les ponts : le mode s'adapte pour que les attaches des ponts soient quasiment à un minimum de déplacement. Cependant, comme illustré par la forme de mode pour des ponts de 4.75 et $7.75 \mu\text{m}$, les ponts subissent quand même des flexions qui contribuent aux pertes d'énergie dans les attaches. Nous pouvons observer que les pertes ont un minimum pour une position de $5.8 \mu\text{m}$ par rapport au centre de la membrane.

En fait, l'anti-croisement en fréquence des mode (s) et (0,0) coïncide avec l'augmentation du facteur de qualité du mode (0,0), mais aussi une diminution de celui du mode symétrique. Il est possible de modéliser simplement le système pont/membrane pour comprendre ce comportement : comme illustré sur la Figure 3.12, la modification

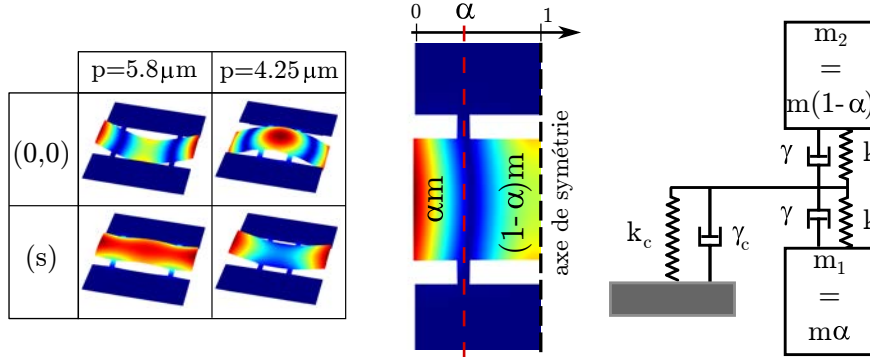


Fig. 3.12 Illustration de l'équivalence entre translation de ponts et le modèle composé de deux masses variables.

de l'emplacement des ponts change le rapport de masse de part et d'autre du pont. Nous avons donc modélisé le système par deux masses oscillantes amorties reliées par une attache de masse nulle exerçant une force de rappel dissipante. Cette attache modélise les ponts, dont la masse est négligée. Les deux masses m_1 et m_2 sont reliées par le paramètre α , avec $\alpha \in [0,1]$ permettant la modélisation du changement de la répartition de la masse suivant la position des ponts. Dans un premier temps, pour alléger les notations, nous allons traiter le système non amorti, puis introduire une partie imaginaire dans les coefficients de rappel élastique pour simuler les différents amortissements.

Utilisant l'équivalence entre la mécanique et l'électrocinétique, le système non dissipatif peut se mettre sous la forme dite de configuration étoile illustrée Figure 3.13 a., où les Y_i sont les admittances. Utilisant la transformation étoile-triangle ce système peut se mettre sous la forme de configuration étoile représentée Figure 3.13 b., dont les admittance sont reliée par l'équation 3.1.32.

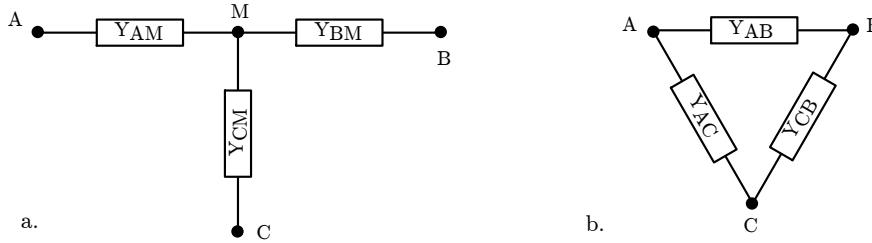


Fig. 3.13 Schéma du système mécanique en représentation d'admittance, pour un système dit en configuration étoile a., et en configuration triangle b. Les deux systèmes équivalents sont reliés par la relation 3.1.32.

$$Y_{AB} = \frac{Y_{AM}Y_{BM}}{Y_{AM} + Y_{BM} + Y_{CM}}. \quad (3.1.32)$$

Ceci nous permet de ramener le système mécanique représenté Figure 3.12 à un système beaucoup plus simple, représenté Figure 3.14 et dont les équations du mouvement se mettent sous la forme matricielle :

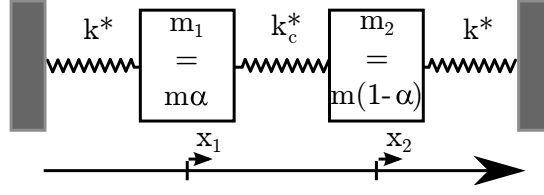


Fig. 3.14 Système mécanique équivalent à celui représenté Figure 3.12 utilisant la transformation étoile-triangle. Les relations entre les paramètres de ces deux systèmes sont données équation 3.1.34

$$\begin{pmatrix} \frac{k^*+k_c^*}{\alpha m} - \omega^2 & -k_c^* \\ -k_c^* & \frac{k^*+k_c^*}{(1-\alpha)m} - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (3.1.33)$$

avec

$$k^* = \frac{k k_c}{2k + k_c}, \quad k_c^* = \frac{k^2}{2k + k_c}. \quad (3.1.34)$$

Nous avons résolu ce système en incluant les termes de dissipation en prenant $k \in \mathbb{C}$, via le logiciel de calcul formel *Mathématica*, donnant pour solutions des nombres complexes dont la partie réelle est la fréquence d'oscillation mécanique et la partie imaginaire le terme de dissipation. Les solutions du problème sont tracées Figure 3.15, y sont représentées les variations de la fréquence mécanique et le rapport fréquence sur dissipation en fonction du paramètre α .

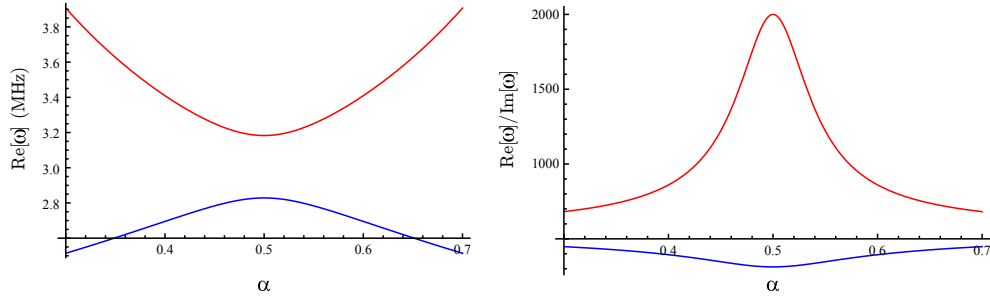


Fig. 3.15 Résolution numérique de l'équation 3.1.33 pour $\alpha \in [0.3, 0.7]$, avec à droite la variation des fréquences des deux modes et à gauche leurs facteurs de qualité.

Il apparaît bien que pour une répartition égale des masses, l'hybridation des modes crée, d'une part, un mode où les deux masses vibrent en opposition de phase, ce qui laisse l'attache immobile et minimise les pertes associées à l'amortissement γ_c . D'autre part, elle crée un mode où les masses oscillent en phase, sollicitant fortement l'attache, ce qui maximise alors les pertes. Comme l'illustre la Figure 3.16, pour cette valeur optimale, le mode a exactement la même forme que le mode propre de la membrane libre (sans support). Ceci illustre bien que pour ces positions, l'influence des ponts est minimum sur le comportement dynamique de la membrane, ainsi les pertes par ancrage sont minimum.

Cependant, lors des mesures faites pour différentes positions des ponts, bien que nous ayons un comportement en fréquence très similaire à celui de la simulation et

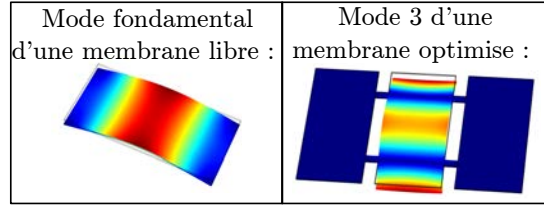


Fig. 3.16 Gauche : Mode propre de la membrane libre. Droite : Mode propre de la membrane dont la place des ponts est optimisée.

du petit modèle jouet dérivé, à savoir l'anti-croisement, nous n'observons aucune influence sur le facteur de qualité mécanique. En effet, comme présenté Figure 3.11 en bas à droite, la dispersion des facteurs de qualité mesurés est assez importante et nous n'observons pas expérimentalement la variation du facteur de qualité attendue en fonction de la position de ponts, ni d'optimum.

Longueur des ponts :

Nous avons également étudié l'influence de la longueur des ponts sur le facteur de qualité. Pour cette étude, les ponts ont été placés aux positions optimales déterminées par les simulations précédentes, nous avons suivi pour les 5 premiers modes l'évolution de la fréquence propre et le taux d'énergie rayonnée par les ponts en fonction de leur longueur. Cette étude a été faite pour deux largeurs de ponts différentes, de 0.5 et 1 μm , correspondant respectivement aux figures 3.17 et 3.18. Les résultats de simulations (b.), montrent une augmentation du facteur de qualité en loi de puissance pour chacun des modes dans les deux situations. Cependant, d'après les mesures faites sur les échantillons, aucune dépendance notable n'est mesurée sur les facteurs de qualité en fonction de la longueur des ponts (voir Figure 3.17 a. et 3.18 a.).

De plus, comparant les mesures présentées 3.17 et 3.18, nous n'observons pas non plus de variation notable pour les deux largeurs de ponts (resp. 0.5 et 1 μm), qui d'après les simulations sont plus faibles d'un facteur 2 pour une largeur de 0.5 μm .

En conclusion, nos structures souffrent toujours de pertes mécaniques que nous n'avons réussi à attribuer pour l'instant à aucun mécanisme.

Evolution à basse température

Malgré des processus de perte non identifiés, nous avons regardé l'évolution de la réponse mécanique en fonction de la température du résonateur. Pour cela, nous avons utilisé le cryostat Janis présenté dans [74]. Ce dernier nous permet d'atteindre des températures d'environ 10 Kelvin. Les facteurs de qualité ont été mesurés par la méthode de ring down, pour des températures de 300, 230, 160, 100, 40 et 10 K. Plusieurs membranes ont été suivies, cependant la variation de fréquence ainsi que l'apparition de certains modes et la disparition d'autres, ne nous a laissé que peu de modes dont l'identification n'est pas ambiguë.

La Figure 3.19 représente la variation du facteur de qualité des quatre modes, ainsi que leur variation relative de fréquence. Nous pouvons observer une augmentation du facteur de qualité vers les plus basses températures, dont l'amélioration est comprise

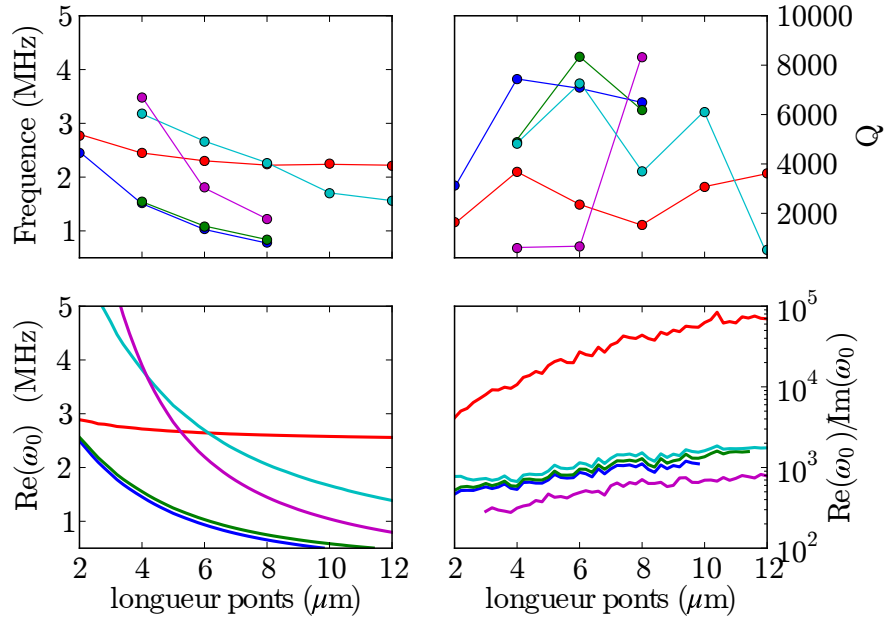


Fig. 3.17 Mesures (a.) et simulations (b.) obtenues pour des longueurs de ponts variant de 2 à 12 μm , et ayant une largeur de 0.5 μm

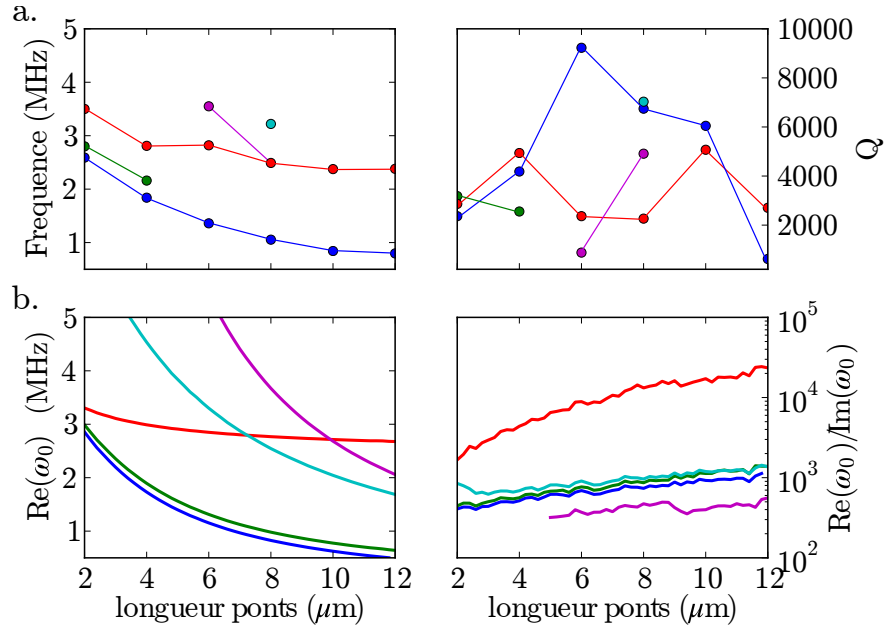


Fig. 3.18 Mesures (a.) et simulations (b.) obtenues pour des longueurs de ponts variant de 2 à 12 μm , et ayant une largeur de 1 μm .

entre un facteur 4 et un facteur 10, suivant le mode. La comparaison de l'évolution du facteur de qualité avec les variations relatives de fréquence, de l'ordre du pourcent, permet de conclure que cette amélioration n'est pas due à la tension induite par des différences de coefficient d'expansion thermique. En effet, comme nous l'aborderons

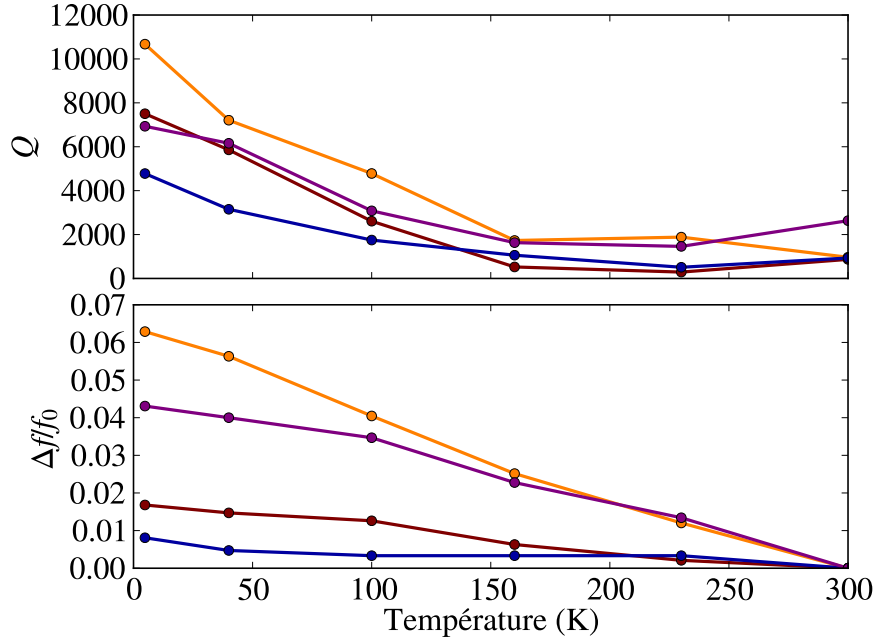


Fig. 3.19 Évolution des facteurs de qualité de plusieurs modes en fonction de la température.

dans la section 3.2, la tension dans un résonateur induit une variation de facteur de qualité qui n'est due qu'à la variation de la fréquence des modes.

Courbure des membranes

En voyant les images faites au microscope électronique de certaines membranes, nous nous sommes rendu compte qu'elles présentaient des courbures. Il était alors important de les mesurer pour savoir si celles-ci limiteraient la stabilité des cavités optiques faites avec ces membranes. Nous nous sommes donc rendus à l'Institut des Systèmes Intelligents et de Robotique qui a procédé à des mesures holographiques permettant de révéler finement la géométrie de nos structures. La Figure 3.20 haut présente les mesures de courbures faites sur les premières générations de membranes. On peut observer que dans la direction de sa longueur (courbe verte), la membrane possède une courbure importante, avec un rayon de courbure de l'ordre de quelques dizaines de micromètres et que les ponts présentent un flambage visible sur la courbe rouge où l'on voit que la membrane n'est pas au même niveau que le mesa. L'effet de courbure peut être un véritable problème pour la stabilité optique des cavités. D'après la formule de stabilité pour une cavité optique donnée dans [75], une cavité optique formée de deux miroirs est stable si la relation suivante est vérifiée :

$$0 < \left(1 - \frac{L}{R_1}\right) \left(1 - \frac{L}{R_2}\right) < 1, \quad (3.1.35)$$

où L est la longueur de la cavité, et R_1 et R_2 sont les rayons de courbure des deux miroirs composant la cavité. Comme nous le verrons dans le prochain chapitre, les rayons de courbure des miroirs utilisés dans nos expériences sont typiquement de l'ordre

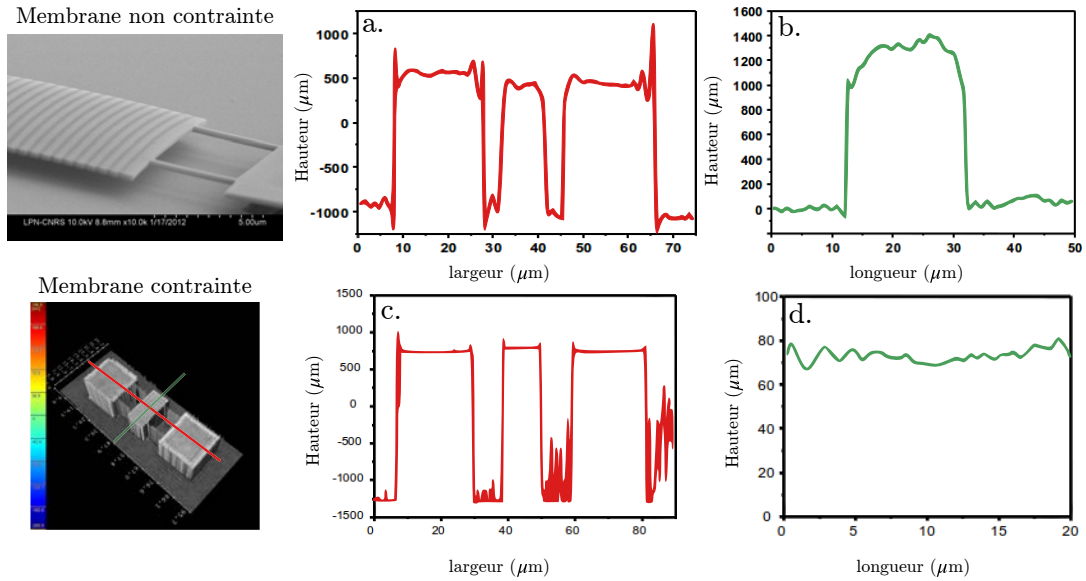


Fig. 3.20 Mesures holographiques de la courbure d'une membrane contrainte (c et d) et non contrainte (a et b).

de la centaine de micromètres, ce qui, appliqué à la relation 3.1.35, donne comme condition de stabilité, une longueur de cavité comprise entre 0 et le rayon de courbure de la membrane, de quelques dizaines de micromètres, ce qui sera difficile à mettre en place expérimentalement.

Pour remédier à ce problème, nous avons tenté de rigidifier la membrane. La couche d'InP est remplacée par un sandwich InP/InGaAs/InP. En jouant sur les concentrations de Ga et d'In, il est possible de faire varier légèrement la taille naturelle de la maille cristalline. Lors de la croissance par épitaxie de l'InGaAs, celui-ci adapte sa maille à celle de l'InP, créant ainsi des contraintes.

Nous pouvons voir Figure 3.20 c et d que la couche sous contrainte résout effectivement le problème de courbure des membranes et, en partie le fléchissement des ponts. En outre, la technique précédente, consistant à faire croître des couches épitaxiales avec un désaccord de maille par rapport au substrat, permet de réaliser des membranes "sous tension". Dans ce cas, la membrane applique une force sur ses points d'ancrage, à la manière d'une peau de tambour tendue sur son support. Afin de mieux comprendre les conséquences d'une telle configuration sur les propriétés mécaniques de la membrane, nous allons présenter dans la section suivante une méthode de résolution basée sur une approche énergétique.

3.2 Méthode de Rayleigh appliquée à une poutre sous tension

Pour nous faire une intuition physique, nous allons prendre le cas d'une poutre encastrée (figure 3.21), de longueur L , de hauteur h et de largeur e , soumise à une force de traction. Nous noterons $Y_n(x,t)$ la forme géométrique du mode de poutre d'ordre n . En plus d'être léger calculatoirement, ce modèle a l'avantage de bien retranscrire le

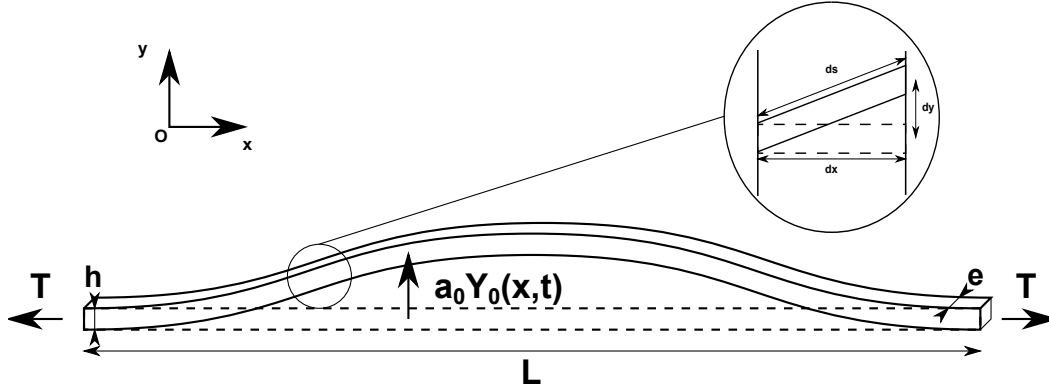


Fig. 3.21 Schéma d'une poutre encastrée soumise à une force extérieure axiale de tension.

comportement des modes où les déformations sont principalement localisées dans les ponts des membranes suspendues. Pour évaluer les fréquences propres des modes et leur modification en fonction de la tension ou des termes non linéaires, nous utiliserons la méthode de Rayleigh. Cette méthode consiste à évaluer les différentes contributions énergétiques lors d'une flexion et à invoquer la conservation de l'énergie mécanique.

Nous allons donc, dans un premier temps, évaluer les différents termes énergétiques mis en jeu. Pour cela, nous allons décomposer le mouvement de la poutre en mouvement harmonique noté $a_n Y_n(x,t)$, où a_n est l'amplitude du mode n et Y_n sa forme, soit :

$$Y(x,t) = \sum_n a_n Y_n(x,t). \quad (3.2.1)$$

La Figure 3.21 représente le profil de déplacement du mode fondamental $Y_0(x,t)$. Les termes contribuant sont : l'énergie potentielle de flexion, qui correspond aux elongations et contractions internes des différentes couches de la poutre, l'énergie potentielle axiale provoquée par l'allongement local des éléments de poutre, l'énergie potentielle de tension due à la force de traction appliquée aux extrémités de la poutre, ainsi que son énergie cinétique.

3.2.1 Energie potentielle de flexion

Considérons le cas d'une poutre en flexion pure où la section droite de la poutre n'est pas modifiée, la Figure 3.22 illustre ce cas pour une section de longueur infinitésimale dx de cette poutre dans la direction x , de hauteur h et de profondeur e . Nous supposons que l'arête centrale, courbe pointillée, garde sa longueur de repos dx et nous notons ρ le rayon de courbure associé à sa déformation. Les couches périphériques, elles, vont subir des elongations et des contractions ε , qui vont exercer des contraintes σ dans la poutre. Considérons une tranche infinitésimale à une distance algébrique u de l'arête centrale, prise positive dans le sens de la convexité, et d'épaisseur du , cet élément subit une elongation ($u > 0$) ou une contraction ($u < 0$) $\varepsilon = u d\theta$, avec $d\theta$ l'angle infinitésimal de flexion. Nous allons considérer d'abord de faibles amplitudes de flexion, ce qui nous permettra de rester dans le cadre de la loi d'élasticité linéaire. Partant de la loi de Hook, nous savons que la force surfacique est égale au produit de l'allongement relatif

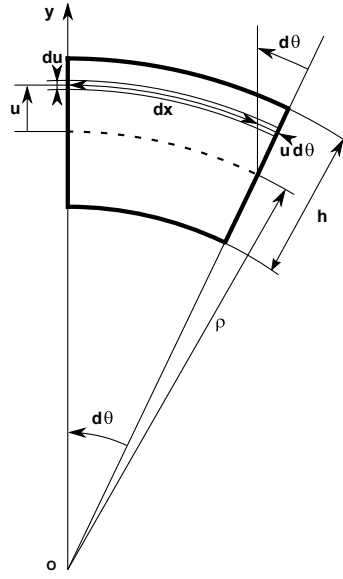


Fig. 3.22 Schéma d'un élément infinitésimal d'une poutre en flexion.

par le module d'Young :

$$\delta^2 F_x = -\sigma \delta^2 S = -e du E \varepsilon = -e du E u \frac{d\theta}{dx}. \quad (3.2.2)$$

Nous pouvons ensuite définir l'énergie potentielle pour cette force associée aux variations de l'élongation (contraction) $u d\theta$:

$$\delta^2 E_{flexion} = \frac{1}{2} e E \frac{du}{dx} (u d\theta)^2. \quad (3.2.3)$$

Or nous savons que pour de faibles déplacements, le rayon de courbure vaut $\rho \simeq 1/Y''$, ce qui nous permet de réécrire l'équation 3.2.3 comme :

$$\delta^2 E_{flexion} = \frac{1}{2} e E u^2 \left(\frac{\partial^2 a_n Y_n}{\partial x^2} \right)^2 dx du. \quad (3.2.4)$$

Qui après intégration sur la hauteur h et la longueur L de la poutre nous donne :

$$E_{flexion} = a_n^2 \frac{E}{2} \frac{e h^3}{12} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 Y_n}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (3.2.5)$$

Le terme $I = \frac{e h^3}{12}$ est appelé le moment d'inertie de la poutre.

3.2.2 Énergie potentielle de tension

Nous allons ici calculer l'énergie potentielle additionnelle lorsqu'une tension extérieure est appliquée aux extrémités de la poutre, comme illustré Figure 3.21. L'incrément d'énergie potentielle est la force associée au travail de la tension T , dû à l'allongement de la poutre lorsqu'elle dévie de sa position d'équilibre jusqu'à sa position de

flexion. Cet incrément d'énergie potentielle vaut :

$$\delta E_{tension} = ehT(ds - dx) = ehT\left(\left((dx)^2 + (dy)^2\right)^{1/2} - dx\right) \quad (3.2.6)$$

Pour de faibles amplitudes de déplacement a_n on peut faire un développement de ds :

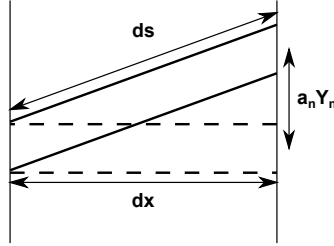


Fig. 3.23 figure

Schéma de l'élongation d'un élément infinitésimal dû à l'amplitude de déplacement de la poutre pour le mode de forme Y_n .

$$\begin{aligned} ds &= \left((dx)^2 + (a_n dY_n)^2 \right)^{1/2} \\ &= dx \left(1 + \left(\frac{a_n \partial Y_n}{\partial x} \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\simeq dx \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a_n \partial Y_n}{\partial x} \right)^2 + \dots \right). \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Cette approximation nous conduit, au premier ordre pour l'énergie potentielle de tension, à :

$$\delta E_{tension} = eh \frac{T}{2} a_n^2 \left(\frac{\partial Y_n}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (3.2.8)$$

puis après intégration à :

$$E_{tension} = eh \frac{T}{2} a_n^2 \int_0^L \left(\frac{\partial Y_n}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (3.2.9)$$

Nous pouvons, pour la suite, calculer l'énergie potentielle à l'ordre 2. Comme nous nous intéressons au comportement de la membrane autour de ses fréquences de résonance, nous ne prenons pas en compte les termes croisés, ce qui nous donne :

$$E_{tension} = ehT \int_0^L \frac{a_n^2}{2} \left(\frac{\partial Y_n}{\partial x} \right)^2 + \frac{a_n^4}{8} \left(\frac{\partial Y_n}{\partial x} \right)^4 dx \quad (3.2.10)$$

3.2.3 Énergie potentielle élastique axiale

Nous allons calculer le terme d'énergie potentielle associé aux forces élastiques de rappel dans l'axe de la poutre dues à l'amplitude de déplacement. Cette énergie potentielle aura donc la forme suivante :

$$\Delta E = \frac{1}{2} k \epsilon^2. \quad (3.2.11)$$

Avec ϵ l'élongation due au déplacement de la poutre. Au vu des données posées pour notre problème, voir figures 3.21 et 3.23, l'incrément d'énergie potentielle par section infinitésimale dx s'écrit comme :

$$\delta E_{\text{élastique}} = \frac{1}{2} E \frac{eh}{dx} (ds - dx)^2 \quad (3.2.12)$$

En se servant de l'approximation 3.2.7 pour de petits déplacements nous trouvons :

$$\delta E_{\text{élastique}} = \frac{eEha_n^4}{8} \left(\frac{\partial Y_n}{\partial x} \right)^4 dx \quad (3.2.13)$$

Soit une énergie élastique totale de :

$$E_{\text{élastique}} = \frac{eEha_n^4}{8} \int_0^L \left(\frac{\partial Y_n}{\partial x} \right)^4 dx \quad (3.2.14)$$

Nous pouvons d'ores et déjà remarquer que ce terme correspond à un terme d'élasticité non-linéaire.

3.2.4 Énergie cinétique

Nous allons calculer l'énergie cinétique de la poutre associée au déplacement $a_n Y_n$ du mode n . Celle-ci a la forme :

$$\delta E_c = \frac{1}{2} \rho a_n^2 \left(\frac{\partial Y_n}{\partial t} \right)^2 \quad (3.2.15)$$

Que nous pouvons écrire dans le cas d'un mouvement harmonique comme :

$$E_c = \frac{\omega^2 \rho a_n^2 eh}{2} \int_0^L Y_n^2 dx \quad (3.2.16)$$

3.2.5 Fréquence de résonance

Ayant calculé tous les termes d'énergie associés au mouvement de la poutre nous pouvons en déduire sa fréquence de résonance :

$$\frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{\left[\frac{eEh^3}{12} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 Y_n}{\partial x^2} \right)^2 dx + T eh \int_0^L \left(\frac{\partial Y_n}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{eha_n^2}{4} (T + E) \int_0^L \left(\frac{\partial Y_n}{\partial x} \right)^4 dx \right]^{1/2}}{2\pi \left[\rho eh \int_0^L Y_n^2 dx \right]^{1/2}}. \quad (3.2.17)$$

Cette expression permet de trouver l'amplitude du mode a_n à partir de laquelle les effets non linéaires doivent être pris en compte. En effet la bistabilité apparaît lorsque le décalage de fréquence produit par les non-linéarités est supérieur à la largeur de la résonance, c'est à dire lorsque $\Delta\omega_m > \Gamma_m = \omega_m/Q$. Or $\Delta\omega_m/\omega_m$ peut être évalué grâce à l'équation 3.2.17, qui en l'absence de tension donne :

$$\frac{\delta\omega_m}{\omega_m} \simeq \frac{1}{2} \frac{\frac{e h a_n^2}{4} E \int_0^L \left(\frac{\partial Y_n}{\partial x} \right)^4 dx}{\frac{e E h^3}{12} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 Y_n}{\partial x^2} \right)^2 dx} \quad (3.2.18)$$

Sauf dans les cas de modes très torturés spatialement les dérivées spatiales peuvent être approchées :

$$\frac{\partial Y}{\partial x} \simeq \frac{Y_0}{\Lambda}, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \simeq \frac{Y_0}{\Lambda^2} \quad (3.2.19)$$

où Λ est la longueur caractéristique de la déformation. Ainsi on trouve en première approximation que :

$$\frac{\Delta\omega_m}{\omega_m} \simeq \frac{a_n^2}{h^2}. \quad (3.2.20)$$

Les effets non linéaires induisent donc de la bistabilité lorsque :

$$a_n \simeq \frac{h}{\sqrt{Q}} \quad (3.2.21)$$

Pour une membrane de 260 nm et un facteur de qualité de 5000, cela correspond à une amplitude de l'ordre de quelques nanomètres. En pratique, de telles amplitudes de vibrations peuvent facilement être atteintes en excitant le résonateur à l'aide d'un actuateur piézoélectrique. Nous présenterons une étude détaillée des effets non-linéaires observés avec les membranes que nous avons développées.

En outre, en revenant à l'expression 3.2.17, nous voyons que la tension permet d'augmenter l'énergie du résonateur sans introduire de nouveaux canaux de perte :

$$\omega_n = \omega_0 \left[1 + \frac{12T}{Eh^2} \frac{\int_0^L \left(\frac{\partial Y_n}{\partial x} \right)^2 dx}{\int_0^L \left(\frac{\partial^2 Y_n}{\partial x^2} \right)^2} \right]^{1/2}. \quad (3.2.22)$$

Il est donc possible d'augmenter le facteur de qualité mécanique en contraignant les structures. Cet effet a déjà été exploité avec des membranes de Nitrure de Silicium [76], nous sommes en train d'étudier si un effet similaire peut être exploité dans le cas des membranes cristallines obtenues par épitaxie par jet moléculaire.

3.3 Régime non linéaire

À la section précédente, nous avons vu qu'on pouvait s'attendre à un comportement non-linéaire des membranes lorsque l'amplitude de déplacement s'approche de :

$$a_n \approx \frac{h}{\sqrt{Q}} \approx 1 \text{ nm}. \quad (3.3.1)$$

La Figure 3.24 gauche montre la forme de la réponse mesurée à l'aide du dispositif décrit dans la section 3.1.2 pour différentes puissances d'excitation de la câle piezo-électrique. Les courbes *a* à *e*, qui présentent les amplitudes d'oscillations mécaniques $\tilde{x}_p[\omega_p]$ du mode fondamental lorsque la fréquence d'excitation est balayée, ont été prises avec des puissances d'excitation comprises entre 10 (courbe *a*) et 30 dBm (courbe *e*). A faible puissance le pic de réponse a une forme lorentzienne, comme prédit par la théorie de la réponse linéaire. A forte puissance, à cause de l'effet non-linéaire, le pic lorentzien se déforme vers les fréquences croissantes jusqu'à présenter une discontinuité (courbes *c, d, e*). Comme prévu, les effets non-linéaires surviennent pour des déplacements dont l'amplitude est voisine de 1 nm. Dans cette partie, nous allons étudier le régime non-linéaire de la réponse mécanique, puis regarder des effets de non-localité en fréquence en mesurant le changement de dynamique induit sur un autre mode, qui lui, est excité en régime linéaire. Enfin nous caractériserons complètement la nature non-linéaire de la dynamique en suivant la trajectoire d'un mode dans l'espace des phases, ainsi qu'en sondant sa réponse mécanique en présence d'un signal de pompe excitant le mode dans son régime non-linéaire.

3.3.1 Modèle de Duffing

L'équation 3.2.17 indique que la fréquence de résonance mécanique dépend du carré de l'amplitude de déplacement a_n . Ce comportement est celui d'un oscillateur de Duffing, dont la dynamique est décrite par :

$$M\ddot{x}_p(t) + M\Gamma\dot{x}_p(t) + M\omega_0^2[1 + \beta x_p^2(t)]x_p(t) = 2\tilde{\alpha}_p \cos(\omega_p t) \quad (3.3.2)$$

où M est la masse du mode, Γ son amortissement, ω_0 sa pulsation de résonance en régime linéaire. La force d'excitation est décrite comme ayant une amplitude $\tilde{\alpha}_p$ et une fréquence ω_p . L'équation 3.3.2 diffère de l'équation d'un oscillateur harmonique par la présence du terme non-linéaire x_p^3 caractérisé par le paramètre β dimensionné en m^{-2} . $1/\sqrt{\beta}$ représente donc une amplitude caractéristique à partir de laquelle les effets non linéaires deviennent importants.

Ce régime non-linéaire a été étudié et est déjà bien connu de la communauté, et différentes propositions ont été faites utilisant ces effets pour améliorer la précision des mesures de fréquence [77], pour la compression de bruit [78], pour l'amplification de signaux [79], ou encore le mixage de fréquence [80]. On peut noter en particulier les travaux de I. Kozinsky, utilisant une force électrostatique pour contrôler la non linéarité [80], ou les travaux de M. John qui utilise une boucle de rétroaction pour annuler et inverser la non linéarité. Comme la relation 3.3.2 est une équation non-linéaire du troisième ordre, le système a des positions d'équilibre stables mais aussi instables, ceci permet de définir des bassins d'attraction qui ont été étudiés dans [81, 82]. De plus de tels oscillateurs exhibent des transitions quantiques entre les deux états stables avant d'être entièrement dans le régime quantique, [77], ces transitions sont considérées comme étant une signature du régime quantique du résonateur.

Au premier ordre, le déplacement forcé est principalement monochromatique à la fréquence ω_p , et comme $Q \gg 1$, sa composante dans l'espace de Fourier est :

$$\tilde{x}_p[\omega_p] = \frac{\tilde{\alpha}_p}{M(\omega_0^2(1 + \varepsilon) - \omega_p^2 - i\Gamma\omega_0)}. \quad (3.3.3)$$

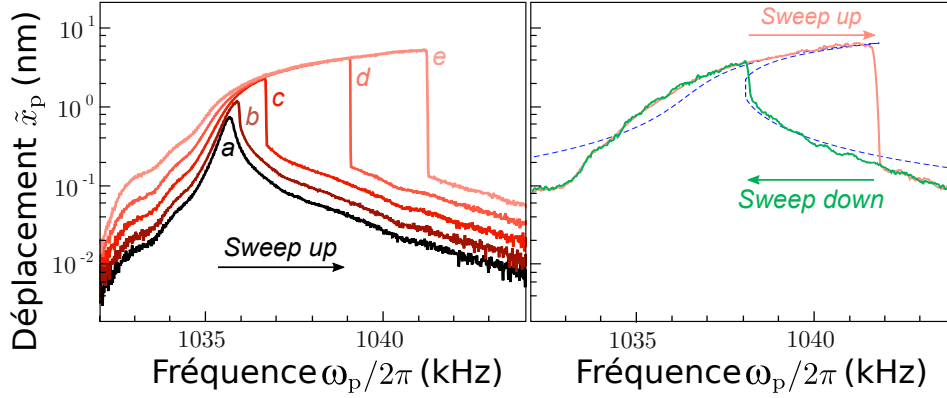


Fig. 3.24 Amplitude d'oscillation $\tilde{x}_p[\omega_p]$ de la membrane en fonction de la fréquence piézo-électrique d'excitation ω_p . La transition du régime linéaire vers celui non-linéaire est clairement visible courbe de gauche de a à e, pour des puissances d'excitation croissantes (10 dbm à 30 dbm avec un pas de 5 dBm). Les courbes à droite montrent l'amplitude de réponse pour un balayage en fréquence positif et négatif (respectivement courbes orange et verte) pour une puissance d'excitation de 30 dBm, nous y voyons le cycle d'hystérésis prévu et ajusté par la théorie (courbe pointillée).

Cette expression correspond à l'usuelle lorentzienne, excepté que la fréquence de résonance est décalée en valeur relative de la quantité ε , qui est proportionnelle du carré du déplacement moyen :

$$\varepsilon = 3\beta|\tilde{x}_p[\omega_p]|^2. \quad (3.3.4)$$

Ce décalage est responsable de la forme des réponses observées Figure 3.24 gauche. Les équations 3.3.3 et 3.3.4 forment un système de degré 3 en la variable $\tilde{x}_p[\omega_p]$, elles possèdent donc jusqu'à trois solutions. Les deux solutions stables des équations 3.3.3 et 3.3.4 correspondent aux branches haute et basse d'un cycle d'hystérésis. Nous avons voulu sonder ces deux branches pour en vérifier le comportement, cependant l'analyseur de réseau permet uniquement de balayer les fréquences de manière croissante, et donc de ne mettre le résonateur que sur la branche haute de stabilité, jusqu'à ce que soudainement il tombe sur la branche basse (voir figure 3.24 gauche). Pour pouvoir observer le cycle d'hystérésis complet nous avons utilisé un analyseur de spectre en mode max-hold combiné avec un générateur de signal dont la fréquence varie continûment soit vers les fréquences supérieures soit vers les fréquences inférieures. Ces deux courbes sont présentées Figure 3.24 droite et exhibent clairement un cycle d'hystérésis. La courbe en pointillée représente le lieu des solutions des équations 3.3.3 et 3.3.4. Seuls les paramètres β et α_p sont ajustés manuellement pour que les branches haute et basse correspondent aux données. Bien que des ordres plus élevées doivent être considérés pour ajuster parfaitement le déplacement, la valeur de β peut néanmoins être évaluée de l'ordre de 10^{13} m^{-2} . Nous pouvons également noter qu'un calcul plus complet [83], permet de prendre en compte la déformation du mouvement par rapport à une sinusoïde en introduisant des harmoniques impaires. Ces harmoniques ont cependant une amplitude $\varepsilon \lesssim 10^{-3}$ fois plus petite que celle du fondamental à ω_p .

3.3.2 Effet statique de la non-linéarité

Les effets non-linéaires proviennent de tensions additionnelles dans la membrane induites par des déplacements de grande amplitude. Nous pouvons donc nous attendre à ce que ces effets soient non locaux en fréquence puisque la tension de la membrane est une propriété globale du système [84, 85]. Nous avons donc sondé l'influence du régime non-linéaire d'un mode (mode 1) sur la dynamique d'un second mode (mode 2). Les contraintes associées aux déplacements de ces deux modes ont été simulées par éléments finis et sont représentées Figure 3.25. Le mode 1 correspond à une translation globale de la membrane hors plan. Le mode 2, lui, correspond à une rotation globale de la membrane. Les deux modes ont la particularité de n'introduire que très peu de contraintes dans la membrane elle-même, mais de concentrer ces contraintes au niveau des ponts. Les contraintes associées aux déplacements de ces deux modes sont localisées aux mêmes endroits, au niveau de l'ancrage des ponts, ce qui devrait donc maximiser le couplage non-linéaire.

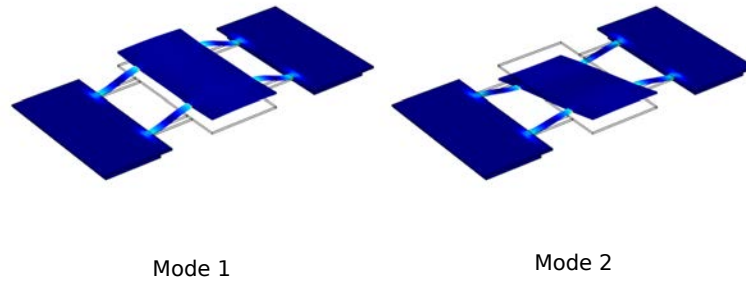


Fig. 3.25 Contraintes générées par les déplacements de la membrane dans les cas du mode 1 et du mode 2, on peut observer que les contraintes induites par ces deux modes sont localisées aux mêmes endroits au niveau des attaches des ponts.

Pour étudier cet effet, nous avons excité la membrane, grâce à la câle piézoélectrique, par deux signaux simultanément : le premier est un signal de pompe, produit par un générateur basse fréquence, et qui est une sinusoïde de forte amplitude et de fréquence calée sur la fréquence de résonance du mode 1, le second est un signal de faible amplitude produit par l'analyseur de réseau, dont la fréquence est balayée autour de la fréquence de résonance du mode 2 pour enregistrer sa réponse. Le protocole est le suivant : la puissance du signal de pompe est fixée à 20 dBm et sa fréquence est fixée à la fréquence de résonance naturelle du mode 1 ; la réponse du mode 2 est enregistrée. Puis la fréquence de pompe est augmentée pour obtenir des effets non-linéaires plus importants et on enregistre à nouveau la réponse du mode 2. On répète ainsi la dernière étape tant que l'on reste sur la branche haute de la courbe de réponse non-linéaire du mode 1. Les courbes centrales de la Figure 3.26 montrent clairement que la fréquence de résonance du mode 2, ω_s , se décale au fur et à mesure que le mode 1 parcourt la branche haute, donc que son amplitude de déplacements augmente. La fréquence de résonance du mode 2 en fonction de celle de pompe est reportée sur la Figure 3.26 à droite. Le mode 2 a un facteur de qualité d'environ 6000, sa fréquence de résonance est donc déplacée de 170 fois sa largeur. Nous avons aussi exploré la branche basse de la bistabilité de la réponse non-linéaire du mode 1 en balayant vers les fréquences

décroissantes (Figure 3.26 droite) et nous retrouvons le comportement bistable sur la fréquence de résonance du mode 2.

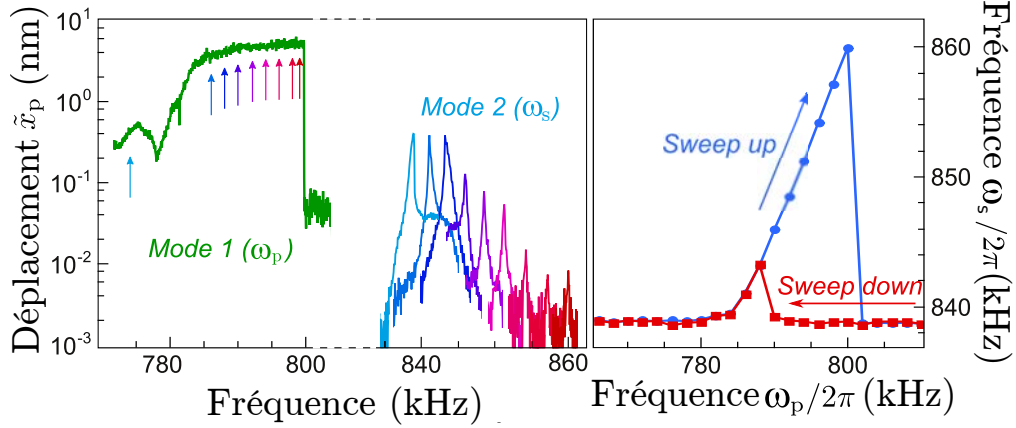


Fig. 3.26 Couplage intermodal : excitation du mode 1 dans son régime non-linéaire (courbe verte de gauche) qui induit un changement de fréquence de résonance du mode 2 (courbes centrales) quand la fréquence d'excitation du mode 1 augmente le long de la branche haute (flèches). Les courbes de droite montrent le comportement bistable de la fréquence ω_s du mode 2 lorsque ω_p est augmenté ou diminué.

3.3.3 Effet dynamique de la non-linéarité

Comme nous l'avons vu, la non-linéarité modifie les paramètres d'élasticité effective, ce qui devrait aussi modifier la dynamique de la membrane. Nous allons donc, dans cette section étudier l'évolution temporelle d'un mode mis dans son régime non-linéaire par une excitation et suivre son évolution libre vers son retour au repos. Pour étudier ce régime transitoire, nous allons utiliser la méthode de Ring Down, détaillée dans la section 3.1.2, à la différence que l'on ne suivra pas l'évolution de la puissance mais directement celle de l'amplitude dans l'espace des phases. Soit $x_p(t)$ l'amplitude de réponse du mode considéré, nous pouvons définir les deux quadratures variant lentement X_1 et X_2 comme :

$$x_p(t) = X_1(t) \cos(\omega_0 t) + X_2(t) \sin(\omega_0 t). \quad (3.3.5)$$

Ces deux quadratures sont accessibles expérimentalement en utilisant un analyseur de spectre en mode de démodulation IQ, qui consiste à mixer le signal reçu avec deux références de même fréquence et en quadrature de phase, puis à filtrer les hautes fréquences. Dans notre cas, la fréquence de démodulation est la fréquence naturelle de résonance, $\omega_0/2\pi$. Pour caractériser au mieux la dynamique non-linéaire, nous avons étudié trois régimes caractéristiques (voir Figure 3.28) : le régime linéaire avec excitation à la fréquence naturelle $\omega_0/2\pi$ (colonne de gauche), le régime linéaire avec excitation hors de résonance (colonne centrale), et le régime non-linéaire (colonne de droite). Ce schéma de mesure et d'acquisition, illustré Figure 3.27 gauche, est implémenté comme suit : un ordinateur pilote, via un programme *LabVIEW*, l'ensemble de la boucle d'excitation et récupère les données enregistrées. Il déclenche un générateur basse fréquence *Agilent*

généralant un signal carré de fréquence 1 Hz qui sert de trigger pour les différents appareils dans la boucle. Sur les fronts de ce créneau, un générateur de signaux *AFG* va déclencher un balayage en fréquence d'une durée inférieure à 500 ms, qui permet dans le cas du régime non-linéaire de se mettre sur une des deux branches de bistabilité. Ce balayage en fréquence passe ensuite par un switch rapide qui sera fermé seulement pour une tension du créneau non nulle, donc pendant 0.5s toutes les 1s. Finalement l'analyseur de spectre en mode "IQ", synchronisé en fréquence avec le générateur *AFG*, commence son acquisition quelques milliseconde avant le signal de trig pour enregistrer le comportement en régime forcé et continue quelques millisecondes après pour enregistrer le régime libre de la membrane. La fréquence de démodulation choisie est la fréquence de référence $\omega_0/2\pi$. La Figure 3.27 droite récapitule les étapes de mise en forme du signal d'excitation des membranes.

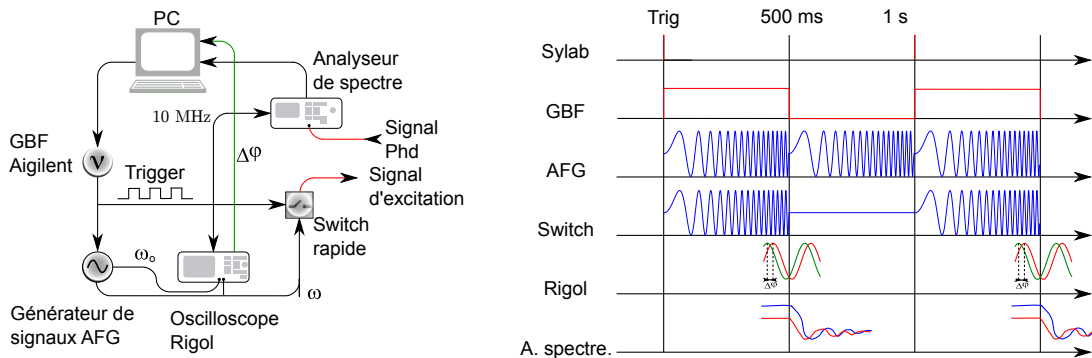


Fig. 3.27 A gauche : présentation du système d'excitation et d'acquisition pour obtenir l'évolution d'un mode mécanique dans l'espace des phases. A droite : signaux générés par la boucle, servant au trig, à l'excitation, à la synchronisation, et à la mesure.

Les trajectoires dans l'espace des phases sont donc représentées pour les trois cas énoncés ci-dessus sur la Figure 3.28 (haut). La membrane est excitée pour $t < 0$ (courbes bleues), puis à $t=0$ l'excitation est coupée via le switch rapide, et son évolution libre est alors enregistrée (courbes rouges). Comme la fréquence de démodulation choisie est la fréquence de résonance naturelle du mode, dans le cas de la réponse forcée, la trajectoire dans l'espace des phases apparaît soit comme un point stationnaire pour le cas de l'excitation à résonance, soit comme un cercle pour le cas de l'excitation hors résonance (courbe bleue Figure 3.28 haut). En ce qui concerne le régime d'évolution libre, lors de l'excitation en régime non-linéaire, on observe une trajectoire en spirale traduisant un changement de fréquence et une diminution de l'amplitude de réponse, tandis qu'en régime linéaire, la trajectoire est presque une droite, quelque soit la fréquence d'excitation dans la phase précédente. De ces jeux de données nous avons extrait l'évolution temporelle de l'amplitude et de la fréquence pour les trois cas. Nous voyons que pour le cas linéaire, à l'instant $t=0$ l'amplitude commence à décroître exponentiellement. En outre, pour le cas hors résonance, on observe un saut instantané vers la fréquence naturelle lors de l'arrêt de l'excitation. Pour le cas non-linéaire, l'évolution de la fréquence change drastiquement : en effet, lorsque l'excitation est coupée, la membrane se met à vibrer instantanément à la fréquence correspondante sur la branche haute de la courbe de bistabilité, pour ensuite relaxer lentement vers sa

fréquence naturelle de résonance à mesure que le régime non-linéaire s'atténue. Ceci se comprend d'après l'équation 3.3.3 où nous voyons que la fréquence de résonance du régime non-linéaire dépend de l'amplitude de déplacement de la membrane \tilde{x}_p . A $t = 0$, la membrane vibre à $\omega_0(1 + \varepsilon/2)$, puis l'amplitude diminue selon une loi exponentielle à cause des pertes mécaniques, ce qui entraîne une diminution de ε (éq. 3.3.4) selon une exponentielle deux fois plus rapide, nous pouvons alors attendre la même décroissance pour la fréquence des oscillations libres.

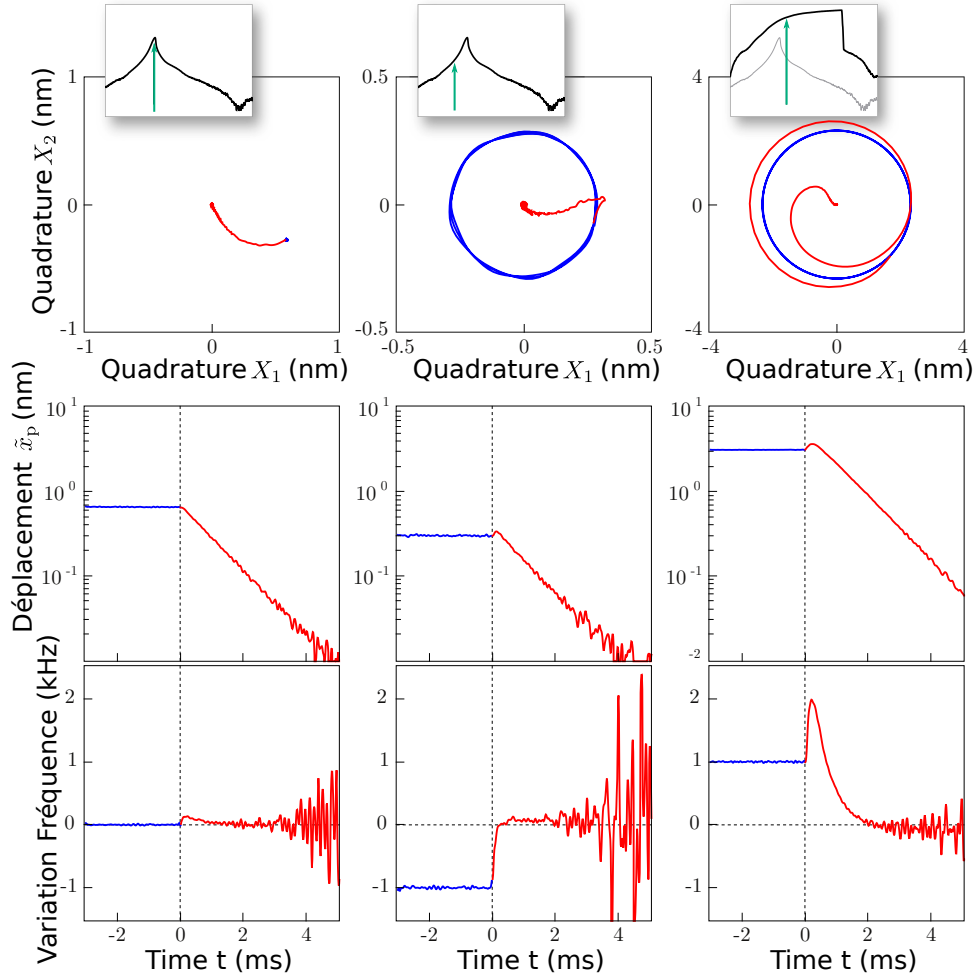


Fig. 3.28 Evolution temporelle dans l'espace des phases pour le régime forcé (bleu) et le régime libre (rouge). De la colonne gauche à droite, trois cas sont étudiés : le régime linéaire à résonance (5 dBm à 1057 kHz), hors résonance (9 dBm à 1058 kHz), et le régime non-linéaire (29 dBm à 1058 kHz). Les courbes de haut en bas représentent : la trajectoire dans l'espace des phases, l'amplitude de la réponse, ainsi que l'évolution de la fréquence.

Pour confirmer le décalage non-linéaire de la fréquence d'oscillation privilégiée, nous avons ensuite étudié la réponse mécanique d'un mode à une sonde de faible puissance pendant que celui-ci était forcé dans son régime non-linéaire par une pompe puissante. Le dispositif expérimental est similaire à celui utilisé dans le cas de l'excitation à deux

modes 3.3.2, excepté que le générateur de signal ainsi que l'analyseur de réseau excitent tous deux le même mode mécanique. La Figure 3.29 gauche montre les spectres $\tilde{x}_p[\omega_s]$ obtenus quand la fréquence de la sonde $\omega_s/2\pi$ est scannée autour de la fréquence de pompe $\omega_p/2\pi$, et ce, pour différentes valeurs de puissance de pompe. Nous voyons

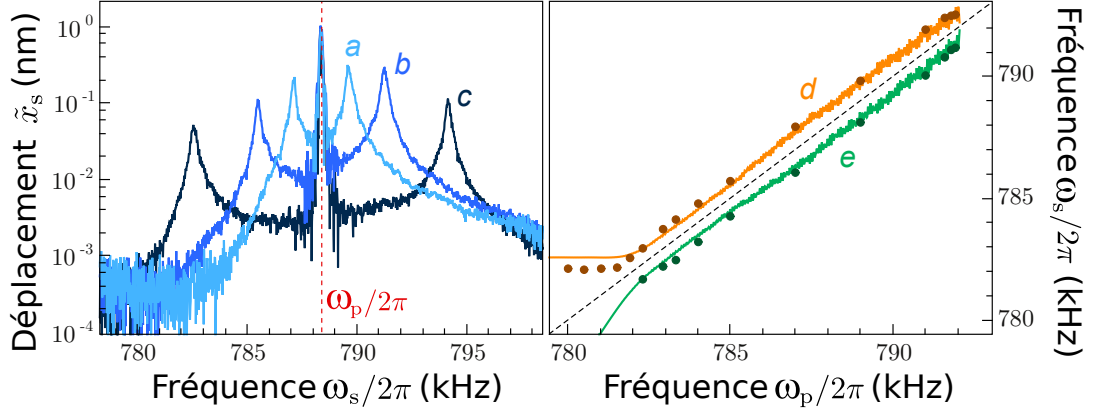


Fig. 3.29 Réponse mécanique d'un mode pompé dans le régime non-linéaire (fréquence ω_p) et sondé par une faible excitation (fréquence ω_s). Les spectres obtenus pour des puissances de pompe de 10, 20 et 30 dBm (courbes a à c) exhibent deux résonances symétriquement réparties autour de la fréquence de la pompe, comme illustré par les courbes d et e, où les points sont les valeurs expérimentales des deux résonances obtenues pour une puissance de pompe de 5 dBm, et où les courbes pleines sont les ajustements théoriques.

clairement une réponse de forme lorentzienne dont la fréquence est au-delà de celle de la fréquence de pompe et est repoussée lorsque les puissances de pompe augmentent. Nous observons aussi qu'une lorentzienne symétrique par rapport à la fréquence de pompe apparaît. En remplaçant l'analyseur de réseau par un analyseur de spectre en mode max hold, nous avons bien pu vérifier le caractère instantané de l'émergence de cette lorentzienne symétrique. En effet lorsque, la sonde se trouve à la pulsation ω_s , le mélange de la pompe et de la sonde conduit à la génération concomitante d'une réponse à ω_s et d'une autre à $2\omega_p - \omega_s$. Cet effet peut être compris en revenant à l'équation de Duffing 3.3.2 et en ajoutant un terme source de la forme $\alpha_s(t) = 2\tilde{\alpha}_s \cos(\omega_s t)$:

$$M\ddot{x} + M\Gamma\dot{x} + M\omega_0(1 + \beta x^2)x = 2\tilde{\alpha}_s \cos(\omega_s t) + 2\tilde{\alpha}_p \cos(\omega_p t + \phi_p), \quad (3.3.6)$$

où x est le déplacement total de la membrane qui est la somme du déplacement dû à la pompe $x_p(t)$ et celui dû à la sonde $x_s(t)$. En supposant que $x_s(t) \ll x_p(t)$, nous pouvons séparer les termes d'ordre 0 en α_p qui redonnent l'équation 3.3.2, et d'ordre 1 en α_s , qui conduisent à l'équation :

$$M\ddot{x}_s(t) + M\Gamma\dot{x}_s(t) + M\omega_0^2[1 + \beta x_p^2(t)]x_s(t) = 2\tilde{\alpha}_s \cos(\omega_s t). \quad (3.3.7)$$

Le terme cubique de l'équation de Duffing est responsable du mixage de fréquence entre la pompe et la sonde, d'une façon assez similaire au $\chi^{(3)}$ d'un milieu Kerr en optique non linéaire. Comme $x_p(t)$ oscille à la pulsation ω_p , le terme non-linéaire $x_p^2(t)$ contient une partie statique, et une oscillant rapidement à $2\omega_p$. La première étant responsable

de la réponse à ω_s tandis que la seconde est responsable de la réponse à $2\omega_p - \omega_s$. En partant de l'équation 3.3.7, nous arrivons au jeu suivant d'équations couplées :

$$\zeta[\omega_s]\tilde{x}_s[\omega_s] + \varepsilon\omega_0^2\tilde{x}_s^*[2\omega_p - \omega_s] = \tilde{\alpha}_s, \quad (3.3.8)$$

$$\zeta[2\omega_p - \omega_s]\tilde{x}_s^*[2\omega_p - \omega_s] + \varepsilon\omega_0^2\tilde{x}_s[\omega_s] = 0, \quad (3.3.9)$$

où $\zeta[\omega] = \omega_0^2(1 + 2\varepsilon) - \omega^2 - i\Gamma\omega_0$ est le dénominateur lorentzien. Nous avons supposé sans perte de généralité que x_p est réel et donc que la phase ϕ_p est ajustée de manière idoine. La résonance de $\zeta[\omega]$ mène donc à la conjugaison de phase des réponses aux pulsations :

$$\omega_{s+} = \omega_0(1 + \varepsilon), \quad \omega_{s-} = 2\omega_p - \omega_{s+}. \quad (3.3.10)$$

Nous pouvons noter que la différence entre ω_{s+} et la pulsation de résonance $\omega_0(1 + \varepsilon/2)$ pour une seule excitation (éq. 3.3.4) est équivalente à la différence entre les self- et cross-modulations de phase dans un milieu Kerr [86].

La Figure 3.29 gauche représente les réponses fréquentielles de la membrane obtenues pour des puissances de pompe croissantes (courbes *a* à *c*). Le pic central à 788.3 kHz est un artifice de mesure correspondant au mouvement provoqué par la pompe, les pics de part et d'autre sont, quant à eux, la réponse x_s à l'excitation α_s . Cette réponse présente une forme de double lorentzienne de largeur égale à la largeur naturelle mais d'autant plus décalées par rapport à la fréquence de résonance naturelle (788.3 kHz) que la puissance de pompe est élevée. Les deux pics sont bien équidistants de la pompe comme le prévoit l'équation 3.3.10.

La Figure 3.29 droite montre les pulsations ω_{s+} et ω_{s-} , déduites des spectres tels que celui de la figure de gauche, en fonction de la pulsation de pompe ω_p . Les courbes *d* et *e* sont les prédictions théoriques obtenues en utilisant l'équation 3.3.10 avec ε estimé par des mesures similaires à celles faites en section 3.3.1. A faible fréquence de pompe $\omega_p \lesssim \omega_0$, la membrane est dans son régime linéaire et nous n'observons qu'un seul pic proche de la fréquence de résonance naturelle $\omega_0/2\pi$. Aux plus hautes fréquences, les deux résonances sont symétriquement disposées par rapport à la fréquence de la pompe, et sont en bon accord avec les prédictions théoriques.

Dans ce chapitre, nous avons présenté les principales sources de pertes pouvant affecter les microrésonateurs mécaniques. Même si nous ne sommes pas parvenus à identifier de façon claire le mécanisme dominant à température ambiante, nous avons mesuré des facteurs de qualités de l'ordre de 10^4 dans un environnement cryogénique. En outre, grâce à l'étude d'un modèle simple dans le cas d'une poutre vibrante, nous avons montré que l'introduction de tension dans la couche vibrante devrait permettre d'augmenter les facteurs de qualité des structures. Finalement, nous avons observé un large éventail d'effets non-linéaires, qui confirment le modèle précédent et qui pourraient être utilisés pour l'amplification, ou encore le mélange de signaux.

Chapitre 4

Mesure et contrôle du bruit thermique

Ce chapitre est consacré à la description de la mise en cavité de nos membranes et aux mesures qu'elle nous a permis de faire. Après avoir décrit brièvement le comportement et les principales caractéristiques d'une cavité Fabry-Perot plan-concave, nous présenterons le montage expérimental de mesure ultra-sensible de déplacements du résonateur, dispositif qui nous a permis d'observer le bruit thermique de membranes à cristal photonique. Nous finirons par la présentation d'une expérience de refroidissement par friction froide et par effet photothermique.

4.1 Comportement d'une cavité Fabry-Perot

Après quelques brefs rappels sur la caractérisation modale d'une cavité Fabry-Perot, ainsi qu'une description des différents paramètres géométriques importants, nous aborderons l'évolution du champ dans une telle cavité dont l'un des miroirs est mobile.

4.1.1 Modes gaussiens d'une cavité Fabry-Perot

Dans l'approximation paraxiale c'est l'optique gaussienne qui est adaptée pour décrire le champ lumineux d'émission d'un laser tout comme celui présent à l'intérieur d'une cavité Fabry-Perot. Le champ électrique peut être décomposé sur la base des modes d'Hermite-Gauss, équation 4.1.1. Un mode TEM_{mn} est défini par deux indices transverses m et n , qui définissent la forme du champ électromagnétique $\varepsilon_{mn}(r,z)$ où z est la coordonnée selon l'axe de la cavité et $\mathbf{r} = (x,y)$ celle dans le plan perpendiculaire. La fonction est donnée par :

$$\varepsilon_{mn}(r,z) = \varepsilon_0 \frac{w_0}{w} H_m\left(\sqrt{2}\frac{x}{w}\right) H_n\left(\sqrt{2}\frac{y}{w}\right) \exp\left(-ikz - ik\frac{r^2}{2q} + i\Psi\right), \quad (4.1.1)$$

où H_m (resp. H_n) représente le polynôme d'Hermite d'ordre m (resp. n). Les paramètres w , q et Ψ dépendent de la position z selon l'axe de la cavité et représentent respectivement la largeur transverse du faisceau, le rayon de courbure complexe et la

phase de Gouy. Ils s'écrivent de la façon suivante :

$$w = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}, \quad (4.1.2)$$

$$q = z + iz_R, \quad (4.1.3)$$

$$\Psi = (m + n + 1) \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right), \quad (4.1.4)$$

où $z_r = \pi w_0^2/\lambda$ est la longueur de Rayleigh associée à la longueur d'onde λ et au col $w_0 = w(z = 0)$, largeur minimale du faisceau atteinte dans le plan $z = 0$. Le rayon de courbure R du front d'onde du faisceau gaussien en z est relié au rayon de courbure complexe q par la relation $R^{-1} = q^{-1} + i\lambda/(\pi w^2)$ et vaut donc $R = z + z_R^2/z$, [75]. Les modes d'une cavité optique linéaire doivent satisfaire les conditions d'interférences constructives entre les multiples réflexions. La cavité sélectionne donc les modes transverses dont les rayons de courbure complexes sont invariants par propagation pour un tour complet dans la cavité, et dont la phase accumulée est un multiple de 2π . Pour un mode gaussien TEM_{mn} de vecteur d'onde k_{pmn} cette phase vaut :

$$\Delta\Psi = 2k_{pmn}L - (m + n + 1)\Psi_0 = 2\pi, \quad (4.1.5)$$

où L est la longueur de la cavité et p un entier naturel correspondant à l'ordre longitudinale du mode. Le premier terme est donc la phase accumulée par une onde plane sur un aller-retour dans la cavité, tandis Ψ_0 représente la phase de Gouy accumulée par le mode TEM_{00} , qui dans le cas d'une cavité plan-concave est donnée par [75] :

$$\Psi_0 = 2 \arccos(\sqrt{1 - R/L}). \quad (4.1.6)$$

La condition 4.1.5 sélectionne la fréquence $\nu_{pmn} = k_{pmn}c/2\pi$ du mode résonant dans la cavité pour un indice longitudinal p fixé, et qui dépend de la phase de Gouy :

$$\nu_{pmn} = \nu_0(p + (m + n + 1)\frac{\Psi_0}{2\pi}) \quad (4.1.7)$$

où $\nu_0 = c/2L$ est l'intervalle spectral libre de la cavité. Ainsi en balayant la fréquence du laser à longueur de cavité constante ou en balayant la longueur de la cavité à fréquence laser constante nous pouvons observer la succession des différents modes résonants.

La largeur minimale du faisceau w_0 est donnée dans le cas d'une cavité plan-concave par :

$$w_0^2 = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{L(R - L)}. \quad (4.1.8)$$

D'après cette expression pour avoir un petit col deux solutions sont envisageables : avoir une longueur de cavité proche du rayon de courbure ou avoir un coupleur de petit rayon de courbure.

4.1.2 Évolution du champ dans une cavité Fabry-Perot

Nous allons décrire dans cette partie l'évolution du champ intra-cavité en prenant en compte les conséquences du mouvement du miroir. Nous allons dans ce cadre considérer les pertes optiques éventuelles, diffusion, absorption, en les modélisant par une

transmission du miroir de fond. Ceci est parfaitement justifié car nous ne sommes sensibles qu'au champ réfléchi par la cavité. Il nous faudra alors prendre en compte le champ du vide qui pénètre dans la cavité par le miroir de fond. Notons donc R et T les coefficients de réflexion et de transmission en intensité du miroir d'entrée ($r = \sqrt{R}$ et $t = \sqrt{T}$ étant les coefficients en amplitude), et P la transmission du miroir mobile. Pour des cavités de haute finesse on peut considérer T et P petits devant 1.

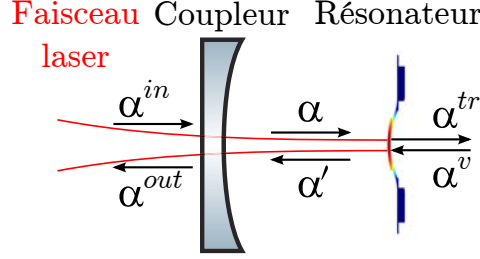


Fig. 4.1 Définition des conventions pour les champs incident, intra-cavité, réfléchi et transmis par la cavité.

Nous pouvons exprimer le champ intra-cavité α à l'instant t comme somme de la partie du champ transmise par le miroir d'entrée et le champ α' ayant fait un aller-retour dans la cavité[87]. De la même manière nous pouvons exprimer le champ sortant de la cavité en fonction du champ incident directement réfléchi et du champ intra-cavité transmis. Ce qui nous donne les relations suivantes :

$$\alpha(t) = t\alpha^{in}(t) + r\alpha'(t), \quad (4.1.9)$$

$$\alpha^{out}(t) = t\alpha'(t) - r\alpha^{in}(t). \quad (4.1.10)$$

Au niveau du miroir mobile nous pouvons exprimer les champ transmis α_{tr} modélisant les pertes et réfléchi α' :

$$\alpha'(t + \tau/2)e^{-i\Psi(t)/2} = \sqrt{P}\alpha^v(t) + (1 - P/2)\alpha(t - \tau/2)e^{i\Psi(t)/2}, \quad (4.1.11)$$

$$\alpha^{tr}(t) = \sqrt{P}\alpha(t - \tau/2)e^{i\Psi(t)/2} - (1 - P/2)\alpha^v(t), \quad (4.1.12)$$

où α_v sont les fluctuations du vide entrant par le miroir arrière. Nous avons pris en compte dans ces dernières relations le temps de propagation du champ dans la cavité pour un aller-retour, $\tau = 2L(t)/c$, ainsi que le déphasage $\Psi(t) = 2kL(t)[2\pi]$ subi par le champ sur un tour. $L(t) = L_0 + x(t)$ est la longueur de la cavité qui prend en compte le déplacement $x(t)$ du miroir mobile. Pour de petits déplacements, on a donc $\tau \simeq 2L_0/c$.

En supposant que la finesse de la cavité est élevée ($T, P \ll 1$) et si la cavité est proche de sa condition de résonance avec le champ incident ($\Psi(t) \ll 1$), alors l'enveloppe du champ $\alpha(t)$ varie peu sur un aller-retour, ceci nous permet d'écrire une équation différentielle pour l'évolution du champ dans la cavité :

$$\tau \frac{d}{dt} \alpha(t) = [-\gamma + i\Psi(t)]\alpha(t) + \sqrt{T}\alpha^{in}(t) + \sqrt{P}\alpha^v(t), \quad (4.1.13)$$

$$\alpha^{tr}(t) = \sqrt{P}\alpha(t) - \alpha^v, \quad (4.1.14)$$

$$\Psi(t) = \Psi_0 + 2kx(t), \quad (4.1.15)$$

où $\Psi_0 = 2kL_0[2\pi]$ est le déphasage de la cavité lorsque que le miroir mobile est au repos, et $2\gamma = T + P$ représente les pertes totales de la cavité.

Ces équations nous permettent de déterminer les champs moyens stationnaires pour les champs réfléchi, transmis et intracavité en annulant l'équation différentielle 4.1.13 et en substituant dans les équations 4.1.10 et 4.1.14, ce qui nous donne :

$$\bar{\alpha} = \frac{\sqrt{T}}{\gamma - i\bar{\Psi}} \alpha^{in}, \quad \bar{\alpha}^{out} = \frac{\gamma - P + i\bar{\Psi}}{\gamma - i\bar{\Psi}} \alpha^{in}, \quad \bar{\alpha}^{tr} = \frac{\sqrt{TP}}{\gamma - i\bar{\Psi}} \alpha^{in}, \quad (4.1.16)$$

où nous avons introduit le déphasage $\Psi = \Psi_0 + 2k\bar{x}$, qui dépend du déplacement moyen du miroir sous l'effet de pression de radiation moyenne du champ intra-cavité, égale à $2\hbar k\bar{I}$. Lorsque la pression de radiation est suffisamment peu intense, le profil d'intensité des champs réfléchi et transmis en fonction du désaccord a une forme lorentzienne. Ce pic d'Airy est centré autour de la condition de résonance et a une largeur γ . La finesse, définie comme le rapport entre l'intervalle spectral libre et la largeur de cette lorentzienne, vaut :

$$F = \frac{2\pi}{2\gamma} = \frac{2\pi}{T + P}. \quad (4.1.17)$$

En comparaison avec le cas sans pertes le champ intra-cavité est réduit d'un facteur $\sqrt{T/2\gamma} = \sqrt{T/(T+P)}$, et l'intensité réfléchie est maintenant inférieure à l'intensité incidente. L'expression du champ réfléchi montre que lorsque l'on balaye le désaccord au voisinage de la résonance, l'intensité réfléchie décrit un pic d'Airy en absorption. Ceci s'explique par le fait qu'à résonance l'intensité intra-cavité est non nulle et qu'une partie de la puissance lumineuse est perdue par le miroir de fond. L'amplitude du pic en réflexion est donnée par le coefficient de réflexion à résonance R_0 qui vaut :

$$R_0 = \frac{\bar{I}_{\Psi=0}^{out}}{\bar{I}_{\Psi=\infty}^{out}} = \left[\frac{T - P}{T + P} \right]^2. \quad (4.1.18)$$

Dans le cas particulier où $T = P$, le champ moyen réfléchi s'annule, ce qui correspond bien au résultat classique d'une cavité symétrique sans pertes.

4.1.3 Adaptation spatiale du faisceau incident

Les pertes de la cavité ne sont pas la seule cause possible de la dégradation de la sensibilité de la mesure, un autre mécanisme est la mauvaise adaptation spatiale du faisceau incident sur la cavité. Dans l'approximation paraxiale les modes de la cavité sont de profil gaussien et sont répartis en série de modes longitudinaux et de modes transverses. Une adaptation spatiale parfaite correspond à un faisceau incident dont le profil est exactement celui du mode de la cavité. Dans le cas contraire le faisceau incident se décompose sur la base des modes de la cavité. Seul le mode fondamental TEM_{00} résonant avec la cavité va pénétrer dans la cavité, les autres modes sont eux directement réfléchis. Ainsi une partie de la lumière incidente ne pénètre pas dans la cavité et n'est donc pas couplée au mouvement du miroir mobile. Plus précisément, le champ incident $\varepsilon^{in}(\mathbf{r}, t)$ se décompose sur le mode fondamental de la cavité de profil $v_0(\mathbf{r})$ plus une partie $\varepsilon'(\mathbf{r}, t)$ sur les autres modes transverses $\{v_{n \neq 0}\}$:

$$\varepsilon^{in}(\mathbf{r}, t) = \alpha_0(t) v_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + \varepsilon'(\mathbf{r}, t), \quad (4.1.19)$$

où α_0 est l'amplitude du mode fondamental. Le champ ε' possède donc un profil orthogonal à v_0 et l'intensité moyenne \bar{I}^{in} du champ incident se met sous la forme :

$$\bar{I}^{in}(t) = |\bar{\alpha}_0(t)|^2 + \int d^3\mathbf{r} |\bar{\varepsilon}'(\mathbf{r}, t)|^2. \quad (4.1.20)$$

Nous pouvons introduire le paramètre d'adaptation spatiale η_{cav} défini comme le rapport entre l'intensité incidente réellement couplée à la cavité ($|\bar{\alpha}_0|^2$) et l'intensité totale incidente :

$$\eta_{cav} = |\bar{\alpha}_0|^2 / \bar{I}^{in}. \quad (4.1.21)$$

Le pic d'Airy en réflexion à résonance est alors modifié et vaut :

$$\bar{I}_{\Psi=0}^{out} = |\bar{\alpha}_0|^2 \left[\frac{T-P}{T+P} \right]^2 + |\bar{\varepsilon}'|^2. \quad (4.1.22)$$

Le coefficient de réflexion à résonance s'écrit alors :

$$R_0 = \eta_{cav} \left[\left(\frac{T-P}{T+P} \right)^2 + 1 \right] - 1. \quad (4.1.23)$$

4.2 Conception de la cavité

4.2.1 Des coupleurs d'entrée à très petit rayon de courbure : μRoC

Les résonateurs que nous avons développés possède un cristal photonique dont la taille transverse est de l'ordre de la dizaine de μm . Pour profiter des propriétés de grande réflectivité, il est nécessaire que le faisceau qui se réfléchit sur le résonateur ait une extension plus petite que celle du cristal. La cavité optique doit être conçue pour prendre en compte cette contrainte.

L'équation 4.1.8 permet de calculer le col du faisceau au niveau du résonateur. Pour une longueur de cavité L et un rayon de courbure du miroir concave R . Il est possible d'obtenir un petit col soit pour des cavités très courtes, soit pour des longueurs de cavité proches du rayon de courbure du miroir concave. Cependant cette deuxième situation n'est pas très favorable car la cavité est proche de son comportement instable ($L \geq R$), de plus cette situation correspond à un col tendant vers l'infini au niveau du miroir d'entrée. C'est donc le choix de cavité courte qui a été mis en place pour nos travaux. Pour avoir un col de l'ordre de quelques micromètres le rayon de courbure du miroir concave qui devra être de l'ordre de la centaine de micromètres.

Cependant, des miroirs avec de tels rayons de courbure sont difficiles à trouver commercialement, il nous a donc fallu développer nos propres coupleurs d'entrée, que nous appellerons par la suite μRoC pour micro radius of curvature. Pour la fabrication nous avons utilisé le montage développé dans l'équipe micro-circuit à atomes dirigée par Jacob Reichel au sein du Laboratoire [88]. Ce montage utilise un laser CO_2 de forte puissance, fortement focalisé, qui lors de son absorption par la surface, vient sublimer celle-ci, créant de petites concavités dont la rugosité rms est très faible (de l'ordre de 0.2 nm). Ces concavités ont des profils gaussiens qui en leur centre peuvent être approximés par un profil sphérique. Le montage utilisé est celui présenté sur la

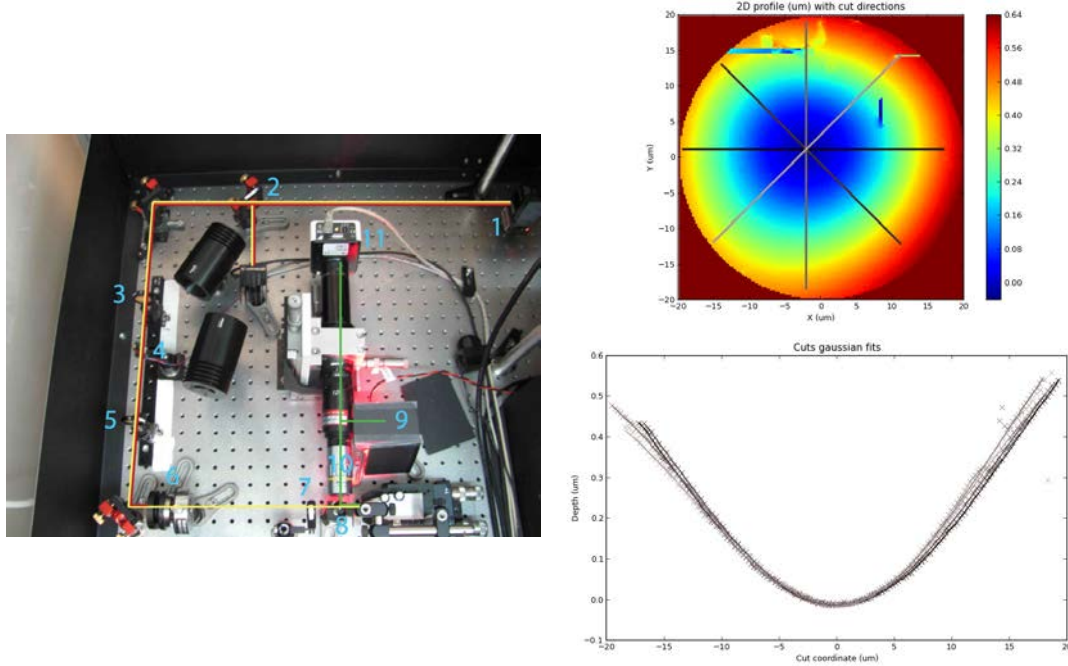


Fig. 4.2 Gauche : Photographie du montage utilisé pour fabriquer les miroirs à faible rayon de courbure. Droite : vue du microscope interférométrique permettant de caractériser géométriquement les concavités créées.

figure 4.2. La source laser CO_2 a une puissance de 20 W (1). Une séparatrice (2) permet de prélever une fraction du faisceau afin de contrôler la puissance du laser. Les deux lentilles (3) et (5) sur rail et la lentille fixe asphérique (7) permettent de focaliser le faisceau du laser sur la surface à traiter. L'obturateur à déclenchement rapide (4) permet de contrôler précisément la durée de l'impulsion laser, typiquement quelques millisecondes. Enfin une séparatrice (8) renvoie une partie du faisceau vers une caméra qui réalise l'imagerie de la surface (9, 10, 11) et permet ainsi l'alignement de la surface par rapport au faisceau du laser CO_2 . Une fois que les plaques de verre ont subi l'ablation, elles sont caractérisées par un microscope interférométrique permettant d'extraire le rayon de courbure de la concavité, sa profondeur ainsi que son diamètre. La Figure 4.2 de droite présente un profil type pour une structure de rayon de courbure $200\ \mu\text{m}$, de profondeur $0.82\ \mu\text{m}$ et de diamètre de $25\ \mu\text{m}$, obtenus pour une puissance laser de 2.55 W avec une durée de l'impulsion de 12.5 ms. Sont présents également les ajustements gaussien et sphérique du profil.

La deuxième étape, pour aboutir aux miroirs concaves finaux est le dépôt de couches diélectriques pour former un miroir de bragg, ces couches sont des alternances de Ta_2O_5 et de SiO_2 . Cette étape est effectuée au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique à Lyon, qui est en charge du dépôt pour les miroirs des interféromètres gravitationnels Virgo et Ligo [89]. Deux types de dépôts ont été réalisés sur les échantillons présentés dans ce manuscrit, le premier ayant une transmission spécifiée à 1.4% et le deuxième à 400 ppm.

4.2.2 La cavité à petit col

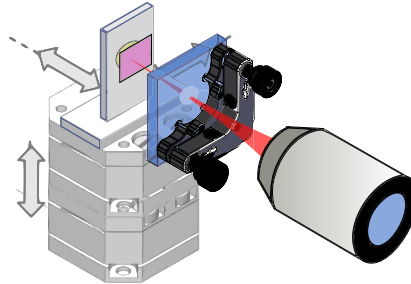


Fig. 4.3 Schéma de montage de la cavité

La Figure 4.3 présente un schéma de la cavité, constituée d'un coupleur d'entrée (bleu) et d'une membrane à cristal photonique (rose). Le coupleur d'entrée est un des μ RoC décrits section 4.2.1, fixé sur un support de miroir ayant deux degrés de liberté angulaires permettant le réglage du parallélisme des deux miroirs. L'échantillon est fixé sur une cale piézoélectrique permettant l'asservissement de la longueur de la cavité, le tout étant monté sur un piédestal lui-même supporté par 3 micro-positionneurs de la marque *Attocube*. Ces positionneurs ont une résolution de l'ordre de quelques nanomètres et une course de 5 mm. Ces degrés de liberté permettent dans la direction z selon l'axe du faisceau, d'ajuster la longueur de la cavité, et dans les deux autres directions de sélectionner une membrane parmi l'ensemble des échantillons fabriqués sur le substrat. Ces micro-positionneurs sont basés sur un système de moteur piézoélectrique et présentent des résonances mécaniques. Le positionneur selon z possède une résonance autour de 200 Hz produisant des déplacements de plusieurs intervalles spectraux libres. Ces déplacements peuvent être utilisés lors de la phase d'alignement pour visualiser l'ensemble des modes optiques de la cavité Fabry-Perot, permettant d'optimiser le recouvrement spatial ou encore faire des mesures de finesse.

4.2.3 Caractérisation des μ ROC

Nous avons voulu vérifier si les transmissions des différents coupleurs utilisés étaient conformes aux spécifications demandées. Avec chacun des coupleurs nous avons réalisé une cavité Fabry-Perot, en utilisant comme miroir de fond un miroir de très haute réflectivité fourni par la société *LaserOptics* dont la transmission est de 60 ppm. La largeur du pic d'Airy étant égale à $\lambda/2\mathcal{F}$, la finesse peut être mesurée en faisant le rapport de l'intervalle spectral libre sur la largeur à mi hauteur du pic d'Airy. En utilisant une résonance mécanique à 198 Hz du micro-positionneur z qui contrôle la longueur de la cavité nous avons pu balayer plusieurs intervalles spectraux libres de la cavité, et à l'aide d'une des photodiodes rapides conçues pour la détection homodyne, détaillées section 4.3.2, et d'un oscilloscope RTO offrant une forte résolution nous avons enregistré les variations d'intensité du faisceau réfléchi par la cavité. Grâce à une routine écrite en langage python nous avons fait des ajustements lorentziens sur les pics de réflexion autour des résonances des modes TEM_{00} , tout en prenant en compte

le filtrage du signal par la photodiode dont la fréquence de coupure est de 118 kHz. La

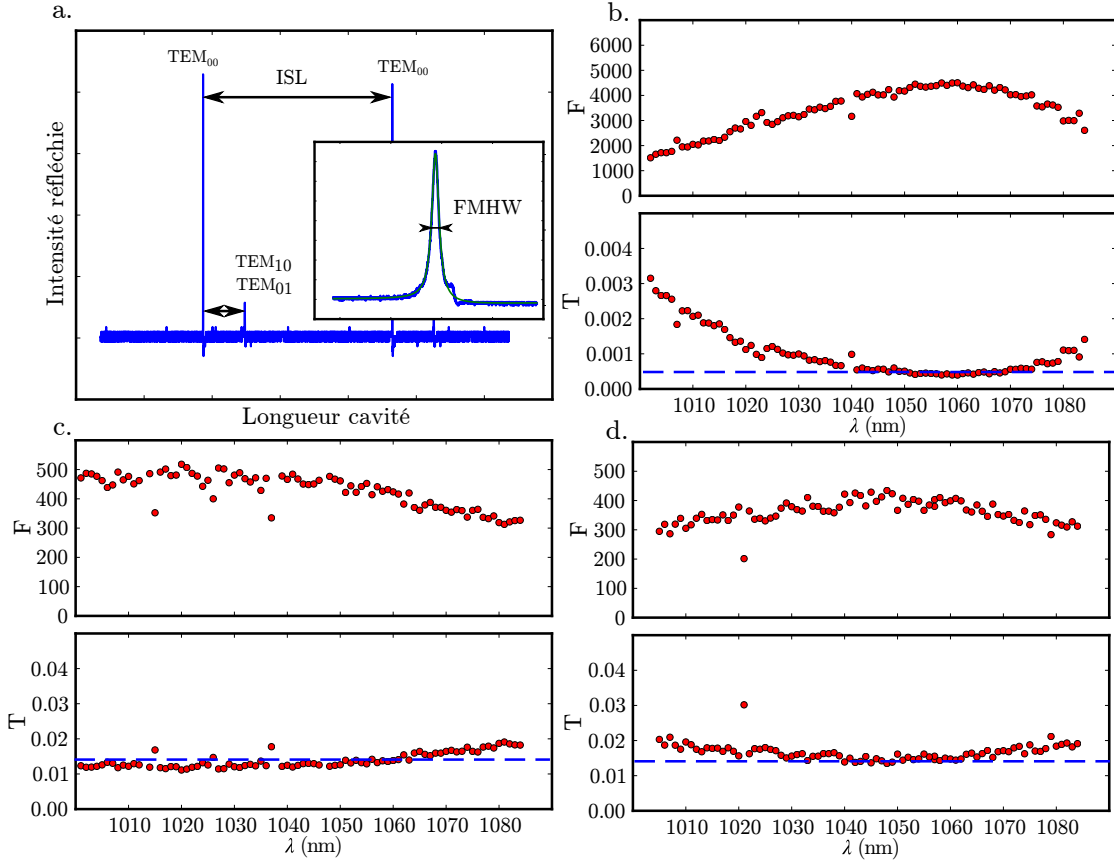


Fig. 4.4 Résultats des mesures de transmission des coating à 1.4% (gauche) et 400 ppm (droite)

Figure 4.4 a. présente les variations typiques d'intensité du champ réfléchi par la cavité lorsque la longueur de la cavité est balayée de plus d'un intervalle spectral libre. On y voit aussi les modes dégénérés TEM_{01} et TEM_{10} qui sont le résultat d'un alignement non optimisé mais non nécessaire pour ces caractérisations. L'insert est un zoom autour d'une résonance du mode TEM_{00} avec son ajustement lorentzien. Les figures b. c. et d. sont les résultats des mesures de finesse et de transmission pour différents coupleurs en fonction de la longueur d'onde du laser. Il apparaît que les transmissions des coupleurs, bien que proches des valeurs spécifiées de 400 ppm et 1.4%, sont légèrement différentes et dépendent de la longueur d'onde. La transmission reste cependant très proche de la valeur annoncée par le LMA autour de 1064 nm (ligne bleue en pointillés).

4.3 Présentation du montage expérimental

4.3.1 Dispositif de mesures

Nous allons dans ce paragraphe détailler les différents éléments présents sur le banc optique servant à la mise en forme du faisceau ainsi qu'à la détection. L'ensemble du

montage est placé sur une table optique à suspensions pneumatiques actives permettant une bonne isolation vis-à-vis des vibrations du sol. Pour protéger de la poussière, l'expérience a été montée sous un flux laminaire de classe 100 assurant un flux d'air propre vertical sur l'ensemble de la table. La Figure 4.5 montre le positionnement

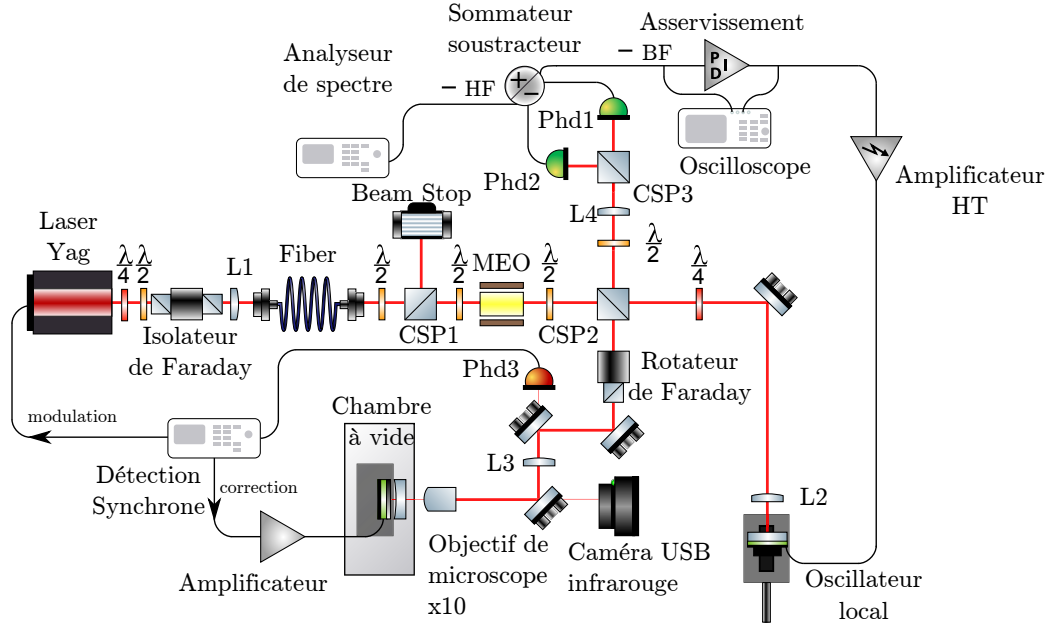


Fig. 4.5 Schéma de mesure

de l'ensemble des éléments optiques et électroniques du montage. Le faisceau laser est produit par une source laser commerciale Nd :Yag continue de modèle Mephisto, dont une étude détaillée a été faite dans [90]. En sortie du laser le faisceau passe par une lame quart d'onde rendant sa polarisation linéaire, puis par une lame demi-onde permettant le passage par l'isolateur de Faraday, qui assure une isolation supérieure à 40 dBm évitant ainsi tout retour de la lumière dans le laser. La lentille L1 assure le couplage du faisceau avec une fibre optique monomode qui assure le filtrage spatial du faisceau dans son mode gaussien fondamental. On mesure un $M^2 = 1.05$ en sortie. Un jeu de lame demi-onde et un cube séparateur de polarisation permet ensuite de contrôler l'intensité lumineuse utilisée pour les mesures. Le faisceau passe ensuite par un modulateur électro-optique LM202 de chez Linos qui nous permet d'ajouter une modulation de phase qui sert de calibration. Le cube CSP2 et la lame demi onde qui le précède permettent de contrôler l'intensité envoyée dans chacun des bras de l'interféromètre. Le bras de mesure est composé d'un rotateur de Faraday qui, avec le CSP2, réalise un circulateur optique. La cavité est ainsi attaquée en polarisation linéaire et le faisceau réfléchi est entièrement redirigé vers la détection homodyne. Une baïonnette permet l'alignement du faisceau sur la cavité et la lentille L3 de foyer 75 mm et l'objectif de microscope Zeiss $\times 10$ permettent l'adaptation du faisceau sur le mode de la cavité. Nous avons mesuré un recouvrement spatiale de 70% avec le mode TEM_{00} de la cavité.

Pour asservir la longueur de la cavité nous utilisons une détection synchrone mo-

durant la fréquence du laser à 50 kHz qui utilise le signal de la photodiode phd3. L'ensemble de la cavité est montée sur un socle d'enceinte à vide permettant la descente en pression pour l'observation du bruit thermique. Le bras de l'oscillateur local est composé lui d'une lame quart d'onde assurant que le faisceau retour soit réfléchi par le cube 2, d'une lentille ainsi que d'un miroir collé sur une cale piézoélectrique permettant un contrôle fin de la longueur des bras. Le tout est monté sur une platine de translation manuelle permettant un réglage grossier de la longueur relative des deux bras. Une fois recombinaison après le cube séparateur 2, le faisceau passe par une lame demi onde et un cube séparateur de polarisation permettant un équilibrage des intensités envoyées sur chacune des deux photodiodes de la détection homodyne. Les signaux de sortie des photodiodes 1 et 2 sont envoyés dans un sommateur/soustracteur dont la différence des voies basse fréquence sert de signal d'erreur pour l'asservissement de l'oscillateur local et la partie haute fréquence de signal de mesure envoyé sur un analyseur de spectre.

4.3.2 Détection de phase du faisceau réfléchi

Deux types de détection de phase ont été utilisés pendant cette thèse. La première est une détection homodyne basée sur une mesure interférométrique et qui requiert un faisceau de référence. La seconde, plus simple à mettre en œuvre utilise la forme du pic d'Airy en réflexion. Nous allons présenter ces deux types de détection.

Principe de l'homodynage

La détection homodyne est basée sur une technique interférométrique où il est nécessaire de séparer le faisceau en deux, l'un intense qui est envoyé sur l'oscillateur local et sert de référence de phase, et l'autre de faible intensité qui est le signal envoyé dans la cavité de mesure. Ce système de détection permet, en réglant la phase de l'oscillateur local, d'accéder aux fluctuations de n'importe quelle quadrature du champ réfléchi. Une fois les deux faisceaux recombinaison, les interférences du mélange permettent de remonter aux fluctuations de phase et donc de position de l'oscillateur mécanique. Dans les paragraphes suivants nous présentons le fonctionnement de ce type de détection, le montage optique permettant de réaliser l'oscillateur local, la séparation du faisceau, leur mélange, ainsi que la détection. Nous présenterons également le montage électronique de détection et d'asservissement de la longueur du bras de l'oscillateur local permettant le contrôle de la quadrature mesurée. Le schéma de détection est celui présenté Figure 4.6, qui est composé d'une lame demi onde et du cube séparateur de polarisation 2, de l'oscillateur local ainsi que les photodiodes 1 et 2 et du boîtier sommateur-soustracteur.

Le faisceau incident polarisé linéairement est séparé en deux parties d'intensité ajustable grâce à la lame demi-onde et au cube séparateur de polarisation 2, l'une étant injectée dans le bras servant de référence de phase, et l'autre dans le bras de mesure. Les faisceaux, après réflexion, voient leur polarisation tournée de 90° , grâce au rotateur de Faraday pour le faisceau de mesure et à la lame quart d'onde tournée à 45° pour l'oscillateur local, ce qui permet de recombinaison les deux faisceaux en sortie du CPS 2. Cependant étant de polarisations orthogonales ils ne peuvent interférer. Pour

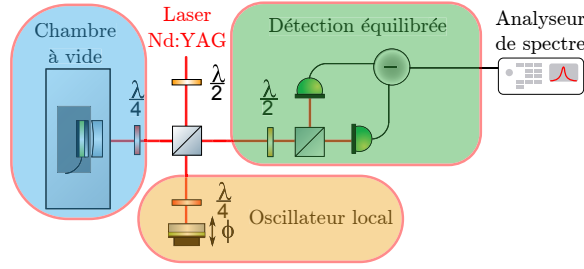


Fig. 4.6 Schéma optique de la détection homodyne, composée d'une détection équilibrée et d'un oscillateur local

mélanger les deux faisceaux on utilise une lame demi-onde tournée à 22.5° ainsi que le cube séparateur de polarisation *CPS3*. Les faisceaux en sortie du cube sont focalisés sur les deux photodiodes de la détection. Les deux photocourants ainsi générés sont pré-amplifiés puis soustraits l'un à l'autre par un boîtier électronique de soustraction.

En notant α_{out} le champ réfléchi par la cavité, et $\alpha_{OL}e^{i\phi}$ le champ de l'oscillateur local, où les amplitudes moyennes α_{out} et α_{OL} sont choisies réelles et où ϕ désigne le déphasage entre les deux champs, les amplitudes $\alpha_1(t)$ et $\alpha_2(t)$ détectées par les deux photodiodes s'écrivent alors :

$$\alpha_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha_{out} + \alpha_{OL}e^{i\phi}], \quad (4.3.1)$$

et

$$\alpha_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha_{out} - \alpha_{OL}e^{i\phi}]. \quad (4.3.2)$$

Les photocourants I_1 et I_2 des deux photodiode s'écrivent donc :

$$I_1 = \frac{1}{2} \left(|\alpha_{out}|^2 + 2\text{Re}[\alpha_{out}\alpha_{OL}^*e^{-i\phi}] + |\alpha_{OL}|^2 \right), \quad (4.3.3)$$

et

$$I_2 = \frac{1}{2} \left(|\alpha_{out}|^2 - 2\text{Re}[\alpha_{out}\alpha_{OL}^*e^{-i\phi}] + |\alpha_{OL}|^2 \right). \quad (4.3.4)$$

Les deux photocourants pré-amplifiés étant soustraits l'un à l'autre, le courant I_- qui en résulte s'écrit alors :

$$I_-(t) \propto 2\text{Re}[\alpha_{out}\alpha_{OL}^*e^{-i\phi}], \quad (4.3.5)$$

et ses fluctuations δI_- s'obtiennent en linéarisant 4.3.5 autour de la valeur moyenne des champs :

$$\delta I_-(t) = \bar{\alpha}_{OL}[\delta\alpha_{out}e^{-i\phi} + \delta\alpha_{out}^*e^{i\phi}] + \bar{\alpha}_{out}[\delta\alpha_{OL}e^{i\phi} + \delta\alpha_{OL}^*e^{-i\phi}]. \quad (4.3.6)$$

Ces fluctuations sont donc la somme des fluctuations de la quadrature α_{out}^ϕ du champ réfléchi par la cavité et de la quadrature $\alpha_{OL}^{-\phi}$ de l'oscillateur local, pondérées respectivement par les champs moyens $\bar{\alpha}_{OL}$ et $\bar{\alpha}_{out}$. On voit alors qu'en fixant l'intensité de l'oscillateur local grande devant celle du faisceau de mesure, le second terme de l'équation 4.3.6 peut être négligé. La différence des photocourants retranscrit ainsi

les fluctuations du champ réfléchi par la cavité de mesure, et son spectre de bruit $S_-[\omega]$, mesuré à l'analyseur de spectre, est proportionnel au spectre S_{out}^ϕ de bruit de la quadrature d'angle ϕ du champ α_{out} :

$$S_-[\omega] = \bar{I}_{OL} S_{out}^\phi[\omega]. \quad (4.3.7)$$

La composante continue de I_- est quant à elle utilisée pour choisir la quadrature ϕ mesurée, elle est directement reliée au déphasage relatif moyen entre les champs :

$$\bar{I}_- = 2\sqrt{\bar{I}_{out}\bar{I}_{OL}} \cos(\phi), \quad (4.3.8)$$

et sert, en pratique, de signal d'erreur permettant l'asservissement de l'oscillateur local, et ce en pilotant une cale piézoélectrique sur laquelle est fixé le miroir de l'oscillateur local.

Implémentation de la détection homodyne

Comme nous venons de le voir l'équilibrage de la détection est particulièrement critique si l'on veut isoler le bruit de phase du faisceau. Nous avons, pour un meilleur contrôle, développé notre propre système de détection, pour cela nous avons construit deux photodiodes rapides à grande efficacité quantique. Ce travail fut en grande partie réalisé par Remy Metzдорff lors de son stage de Licence dans notre équipe. Le choix des photodiodes s'est porté sur des cellules photosensibles en InGaAS, *ETX 500* de la société *JDCU*, offrant de meilleurs performances à 1064 nm que le silicium. Elles ont une densité de bruit très faible $10 \text{ fA}/\sqrt{\text{Hz}}$ et ont un diamètre actif de 0.5 mm. Dans la section précédente nous avons vu qu'il était nécessaire d'avoir les deux photodiodes de la détection parfaitement équilibrées, nous avons donc mesuré pour plusieurs de ces photodiodes leur efficacité quantique et sélectionné les deux ayant les réponses les plus similaires. Les deux photodiodes retenues ont un taux de conversion photon-électron 59.4% et de 59.6%. Nous avons ensuite construit le circuit électrique permettant la séparation des composantes basse fréquence et haute fréquence du signal, ainsi que l'amplification de ses deux composantes pour rendre le courant des photodiodes mesurable.

L'extraction de la composante haute fréquence du photocourant est basée sur un montage transimpédance, Figure 4.7 a en haut. A haute fréquence la capacité d'entrée de 1 nF se comporte comme un court-circuit et la cathode de la photodiode est reliée à l'entrée de l'OPA 657U qui amplifie le signal. Nous avons mesuré la réponse spectrale du montage, puis, par un ajustement du filtre passe haut du premier ordre, nous avons extrait sa fréquence de coupure trouvée à 118 kHz. Là encore il est nécessaire de s'assurer que les deux boîtiers ont le même gain électronique. La Figure 4.8 présente les réponses en amplitude et en phase des voies hautes fréquences des deux photodiodes construites (courbes bleues et vertes), la différence des deux signaux est aussi représentée (courbe rouge), pour la gamme de fréquence qui nous intéresse les voies ont bien des réponses similaires à 0.1 dB près.

Nous avons aussi construit un boîtier électronique sommateur/soustracteur dont le schéma électronique de principe est présenté Figure 4.7 b. Les entrées de celui-ci comportent un étage d'adaptation d'impédance 50Ω . Les deux sorties sont elles aussi

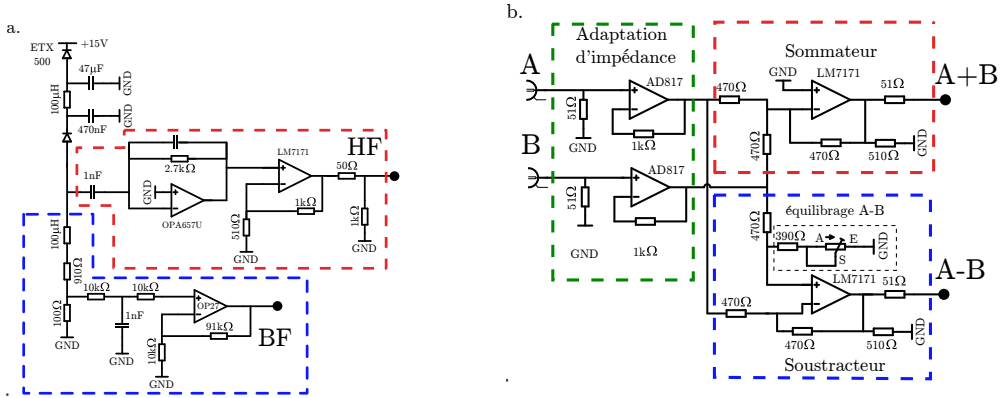


Fig. 4.7 a : Schéma électronique de principe de fonctionnement des photodiodes. b : Schéma électronique de principe de fonctionnement du sommateur-soustracteur.

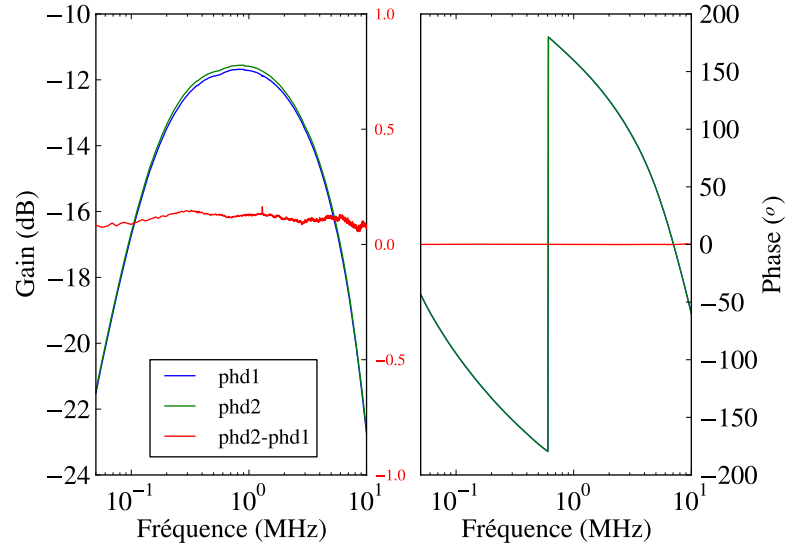


Fig. 4.8 Réponse des photodiodes 1, 2 et de leur différence en amplitude à droite et en phase à gauche.

adaptées en 50Ω. Pour la partie soustracteur, un potentiomètre permet d'ajuster le gain de la voie A pour qu'il soit parfaitement égal à celui de la voie B.

Principe de la détection à mi-pente

Pour une cavité possédant des pertes optiques, le champ réfléchi présente un pic d'Airy en réflexion. En fixant le point de fonctionnement de la cavité sur le flanc de ce pic, les petits déplacements du résonateur vont se traduire par des fluctuations d'intensité du champ réfléchi. Cet effet permet donc de réaliser une mesure simple à mettre en œuvre que nous allons décrire dans la suite.

Pour une mesure à mi-pente, les variations d'intensité δI_x du champ réfléchi par la

cavité sont reliés aux petits déplacements δx du résonateur par :

$$\delta I_x = \alpha \delta x, \quad (4.3.9)$$

avec $\alpha = \frac{2A\mathcal{F}}{\lambda}$ la dérivée du pic d'Airy à mi-pente, et qui est égale à l'amplitude A du pic d'Airy divisé par sa demi-largeur à mi-hauteur. Ainsi le signal pic-à-pic $V_{pp,x}$ délivré par les photodiodes de la détection est de la forme :

$$\delta V_{pp,x} = 2 \frac{V_0 \mathcal{F}}{\lambda} \delta x \quad (4.3.10)$$

où la tension V_0 est la profondeur du pic d'Airy en réflexion mesurée par la photodiode.

Le signal P_x^{dBm} lu par l'analyseur de spectre est exprimé en dBm et vaut :

$$P_x^{\text{dBm}} = 10 \log_{10} P_x / P_0 = 10 \log_{10} \left(\frac{V_{pp,x}^2}{8RP_0} \right), \quad (4.3.11)$$

où P_x est la puissance de bruits en Watt, P_0 vaut 1mW, et R l'impédance de l'analyseur (50Ω). Ce qui nous donne comme déplacement calibré :

$$\delta x_{cal} = \frac{\lambda}{2\mathcal{F}V_0} \sqrt{P_0} 10^{P_x^{\text{dBm}}/20}. \quad (4.3.12)$$

Mesure de la masse

Nous avons vu dans la partie précédente comment convertir les puissances mesurées par l'analyseur de spectre en déplacements de la membrane. Cette calibration permet de calibrer la variance du spectre thermique, étant l'intégrale du spectre $S_{xx}(\omega)$, et qui est reliée à la température T , la masse effective M_{eff} et la fréquence ω_m par la formule de Boltzmann :

$$\Delta x^2 = \int d\omega S_{xx}(\omega) = \frac{k_b T}{M_{eff} \omega_m^2}. \quad (4.3.13)$$

La puissance lue par l'analyseur de spectre est reliée au spectre du signal électrique S_{vv} par :

$$P(\omega) = S_{vv}(\omega) \frac{RBW}{R}, \quad (4.3.14)$$

où RBW est la largeur de bande d'intégration du signal. Utilisant eq. 4.3.12, 4.3.13 et 4.3.14 nous arrivons à l'expression de la masse effective :

$$M_{eff} = \frac{k_b T}{\omega^2} \frac{RBW}{R} \left(\frac{\lambda}{2\mathcal{F}V_0} \right)^2 \left[\int d\omega P(\omega) \right]^{-1} \quad (4.3.15)$$

La figure 4.9 donne un exemple de spectre de bruit thermique d'un mode d'une membrane suspendue. La température du mode est égale à la température du bain thermique, c'est à dire 300 K. L'intégrale du spectre est déduite de l'ajustement lorentzien du bruit thermique sans prendre en compte le fond. Pour ce mode particulier, on obtient une masse de 2.9×10^{-14} kg. La simulation par éléments finis prédit une masse de 3.26×10^{-14} kg.

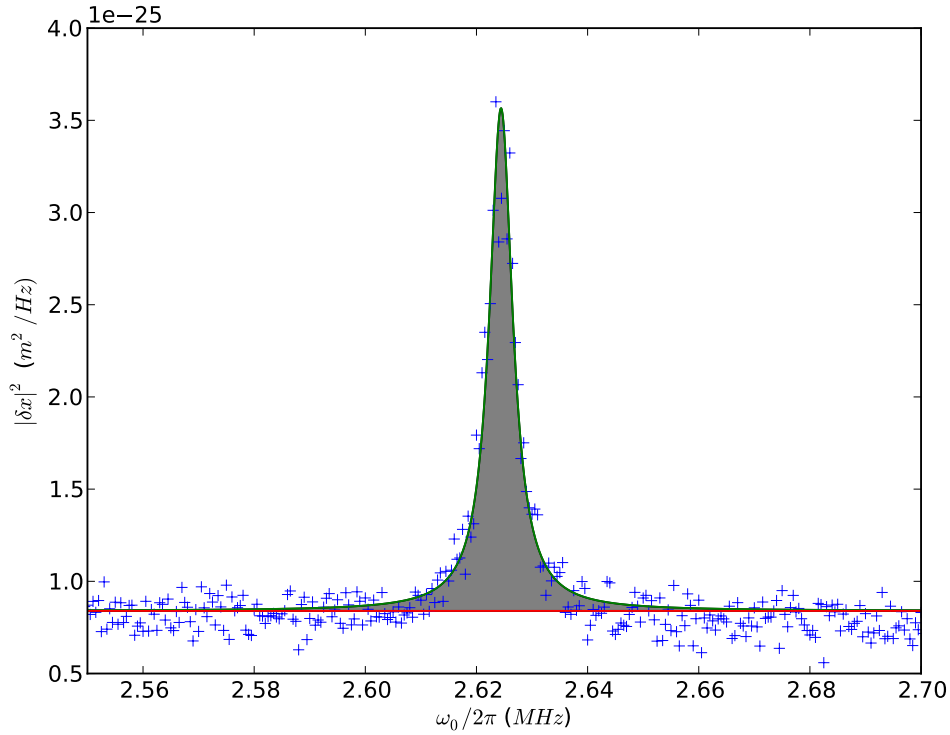


Fig. 4.9 Exemple de calibration d'un spectre thermique.

4.4 Réponse aux forces de Langevin

Le dispositif de mesure présenté précédemment permet de mesurer des petits déplacements avec une sensibilité suffisante pour observer le mouvement Brownien de nos membranes à cristal photonique. Nous présentons dans cette partie l'étude du bruit thermique à température ambiante d'une membrane tambour.

Une cavité optique a été formée en utilisant le $\mu\text{RoC } S_{11}$ de transmission 1.4% et une membrane tambour de dimension $30 \times 30 \times 0.26 \mu\text{m}^3$, la longueur mesurée de la cavité est de $97 \mu\text{m}$, et sa finesse est de 110. Les mesures présentées ont été obtenues avec une puissance incidente de 0.6 mW. La courbe du haut de la figure 4.10 présente le spectre thermique calibré en déplacement de la membrane sur la plage 1 à 10 MHz, Il a été acquis en trois fois par parties de 4 MHz de large, avec une résolution spectrale (BW) de 100 Hz et de 40001 points par acquisition, soit un point tout les 100 Hz. Chaque acquisition est moyennée une centaine de fois.

Sur le spectre sont visibles les pics de bruit thermique des modes de la membrane, en accord avec ce qu'on attendait théoriquement (section 1.2.1). Du fait de sa faible masse, donc de la faible masse effective des modes, l'amplitude des pics est relativement importante par rapport au plancher de bruit observé sur le spectre, avec une dynamique dépassant de 3 ordres de grandeur pour certains modes.

Il est possible de distinguer onze résonances sur la plage 1 – 10 MHz. Pour pouvoir

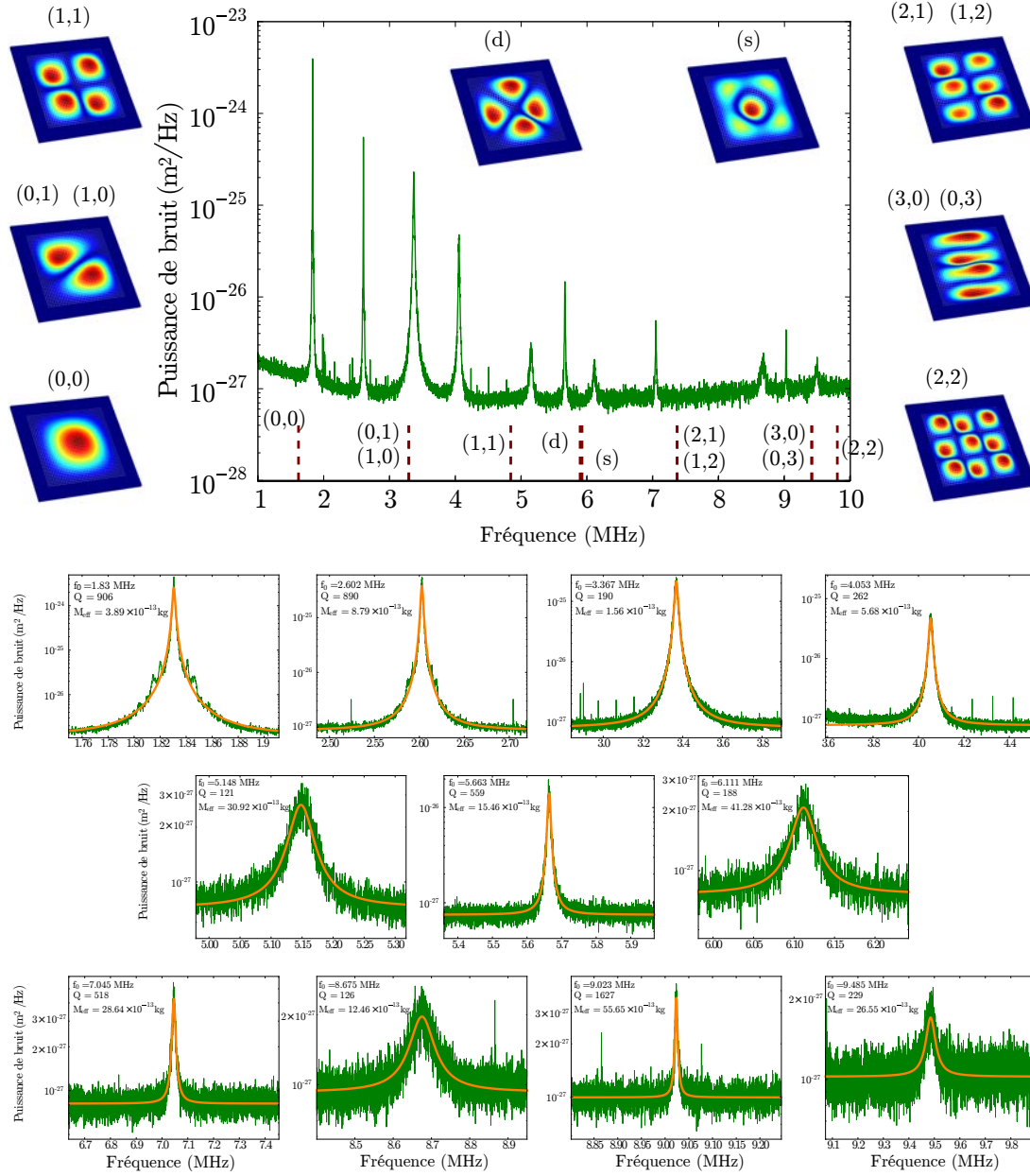


Fig. 4.10

identifier ces différents modes nous avons fait des simulations par éléments finis de la membrane. Cela permet d'extraire les profils des différents modes, leur fréquences de résonance attendues ainsi que leur masses effectives. Les fréquences calculées sont représentées par les lignes pointillées marron sur le graphique supérieur et les profils des modes d'ordres les plus bas sont présentés. Les fréquences attendues ainsi que les masses effectives des modes sont répertoriées dans le tableau 4.11. Ces masses effectives sont calculées sur la base d'une col au niveau de la membrane de $5\mu\text{m}$ placé en son centre (voir équation 1.2.29). Le mode fondamental peut être clairement identifié par

mode	f_0 (MHz)	M_{eff} (kg)
(0,0)	1.617	1.77e-13
(1,0),(0,1)	3.293	9.21e-13
(1,1)	4.841	4.87e-12
(d)	5.895	2.90e-12
(s)	5.924	2.30e-13
(2,1),(1,2)	7.369	1.97e-12
(3,0),(0,3)	9.414	5.59e-13
(2,2)	9.802	7.00e-13

Fig. 4.11 Fréquences et masses effectives des modes calculées par éléments finis.

sa fréquence qui correspond bien à celle attendue. Les autres modes sont plus difficiles à cataloguer d'autant qu'il y a plus de modes mécaniques observés que prévus par la simulation.

Néanmoins, à partir de l'étude de ce spectre, il est possible de remonter aux caractéristiques mécaniques des différents modes de vibration, telles que leur fréquence de résonance, leur facteur de qualité, leur masse effective. Dans la partie inférieure de la Figure 4.10 est présente la réponse des différents modes mécaniques à laquelle est superposé un ajustement lorentzien donné par l'équation 1.2.12. Ces ajustements permettent d'extraire les différentes caractéristiques de chaque mode. Même si la correspondance mode à mode est difficile, les valeurs des masses effectives mesurées ont le bon ordre de grandeur dans la gamme du nano gramme.

4.5 La friction froide

Dans cette section nous allons présenter une expérience de refroidissement actif du bruit thermique de la membrane. Le contrôle du bruit thermique se fait grâce à une boucle de contre-réaction extérieure selon une technique de friction froide. Elle consiste à venir appliquer une force visqueuse sur le résonateur qui peut extraire ou injecter des phonons. Lorsque le bruit électronique de la boucle est négligeable, nous pourrions considérer que cette force ne rajoute pas de fluctuation sur le résonateur. Ainsi utilisant le théorème fluctuation dissipation qui lie le spectre de la force de Langevin à la dissipation du système mécanique il est alors possible de définir pour ce nouvel état d'équilibre une température effective du mode mécanique. Après avoir présenté le principe de la friction froide, nous exposerons son implémentation sur le montage, puis nous présenterons les résultats préliminaires de refroidissement actif d'une membrane.

4.5.1 Le principe de la friction froide

Au voisinage d'une résonance mécanique, le mouvement du résonateur est essentiellement régi par le mode résonant. Son comportement est équivalent à un unique oscillateur harmonique. Notons ω_0 sa pulsation propre, M sa masse et Γ son taux d'amortissement. Sa susceptibilité mécanique χ s'écrit donc :

$$\chi[\omega] = \frac{1}{M(\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega)} \quad (4.5.1)$$

Supposons maintenant que l'on applique sur le résonateur une force de contre-réaction déphasée de ϕ par rapport au mouvement $F_{fb}[\omega] = e^{i\phi} KM\delta x[\omega]$. A l'équilibre thermique le résonateur répondra à la somme de la force de Langevin et de cette force, et son déplacement sera :

$$\delta x[\omega] = \chi[\omega](F_T[\omega] + F_{fb}[\omega]) = \chi[\omega](F_T[\omega] + e^{i\phi} KM\delta x[\omega]), \quad (4.5.2)$$

que l'on peut réécrire comme :

$$\delta x[\omega] = \frac{1}{1/\chi[\omega] - KM e^{i\phi}} F_T[\omega] = \chi_{fb}[\omega] F_T[\omega], \quad (4.5.3)$$

où χ_{fb} est la nouvelle susceptibilité du miroir en présence de la boucle de contre-réaction. Utilisant l'expression de la susceptibilité donnée par l'équation 4.5.1, on trouve l'expression de χ_{fb} :

$$\chi_{fb}[\omega] = \frac{1}{M(\omega_0^2 - K \cos(\phi) - \omega^2 - i(\Gamma\omega + K \sin(\phi)))} \quad (4.5.4)$$

Le résonateur se comportera donc comme un oscillateur harmonique de masse M , de fréquence et d'amortissement modifiés par rapport à la réponse de l'oscillateur sans contre-réaction, soit respectivement $\omega'_0 = \sqrt{\omega_0^2 - K \cos(\phi)}$, et $\Gamma' = \Gamma + K' \sin(\phi)$.

On obtient donc un comportement différent selon la valeur de la phase ϕ :

- En phase et en opposition de phase, respectivement pour $\phi = 0$ et $\phi = \pi$, le terme d'amortissement supplémentaire introduit par la boucle de contre-réaction est nul mais celui agissant sur la fréquence est maximal. L'oscillateur se comporte alors comme un oscillateur de fréquence décalée par rapport à sa fréquence naturelle de résonance, mais de même taux d'amortissement.

- Lorsque la contre-réaction agit en quadrature de phase par rapport au déplacement du résonateur, pour $\phi = \pi/2$ ou $\phi = 3\pi/2$, c'est le terme en fréquence qui devient nul et le terme d'amortissement additionnel qui est maximal. L'oscillateur se comporte alors comme un oscillateur de même fréquence de résonance que dans le cas sans contre-réaction mais avec un taux d'amortissement modifié.

Ces quatre situations sont illustrées Figure 4.12, et bien entendu, pour une phase quelconque l'influence de la boucle de contre-réaction sera un mélange des effets évoqués ci-dessus. Il est à noter aussi que dans le cas où $\phi = -\pi/2$, il est possible d'annuler le terme d'amortissement ($K = \Gamma\omega$), dans ce cas le système devient instable et part en oscillations paramétriques.

Le cas du refroidissement

La configuration intéressante pour les expériences de refroidissement est celle où la force agit en quadrature de phase par rapport au mouvement du résonateur, qui est appelé friction froide. Dans ce cas l'équation 4.5.5 peut se mettre sous la forme :

$$\chi_{fb}[\omega] = \frac{1}{M(\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega(1 + g))}. \quad (4.5.5)$$

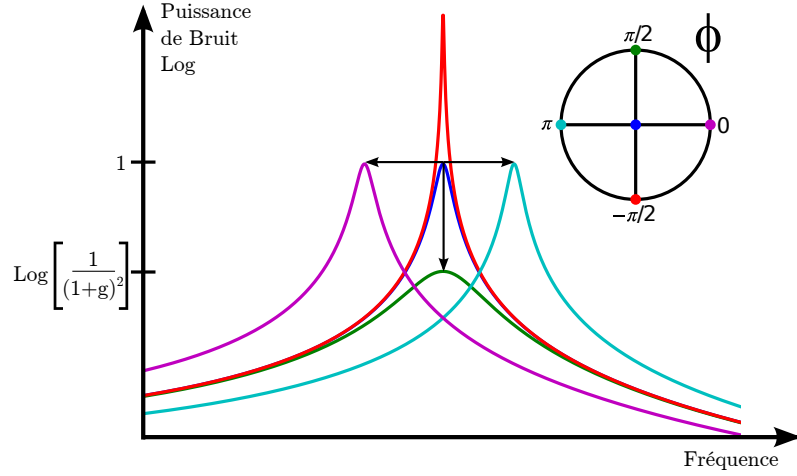


Fig. 4.12 Modification du spectre de bruit thermique pour quatre phases différentes de la boucle de contre-réaction : décalage de la fréquence de résonance pour un déphasage en phase ou en opposition de phase (courbe violet et cyan), et augmentation ou diminution de la largeur pour une force en quadrature par rapport au mouvement du résonateur (courbe verte et rouge). La courbe bleue étant la réponse lorentzienne sans contre-réaction.

Dans cette équation, le paramètre g caractérise le gain de la contre-réaction. Déterminons maintenant l'effet du bruit thermique sur la réponse du miroir. La force de Langevin F_T n'est pas modifiée par la contre-réaction car elle n'est due uniquement qu'aux processus de dissipation au sein du miroir. Le spectre de bruit de position du miroir est donc donné par :

$$S_x^{fb}[\omega] = \frac{2\Gamma k_b T / M}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2(1+g)^2\omega^2}. \quad (4.5.6)$$

On voit alors que la largeur du spectre est modifiée par la contre-réaction d'un facteur $(1+g)$ et que sa hauteur à résonance l'est aussi d'un facteur $(1+g)^2$, comme illustré sur la Figure 4.12. On en déduit donc que l'aire du spectre est diminuée d'un facteur $(1+g)$, or celle-ci est directement reliée à la variance du bruit de position Δx^2 . Ceci est équivalent, d'après le théorème d'équipartition d'énergie, à une diminution de la température du mode. Plus précisément, d'après les expressions de la susceptibilité en présence de la friction froide et du spectre de la force de Langevin, le miroir obéit au théorème fluctuations-dissipation associé à la susceptibilité χ^{fb} :

$$S_{F_T} = -\frac{2k_b T_{fb}}{\omega} \text{Im} \left(\frac{1}{\chi_{fb}[\omega]} \right), \quad (4.5.7)$$

où la nouvelle température T_{fb} est définie par :

$$T_{fb} = \frac{\Gamma}{\Gamma_{fb}} T = \frac{T}{1+g}. \quad (4.5.8)$$

Nous voyons donc que le mode mécanique se comporte comme s'il était couplé à un bain thermique de température T_{fb} .

4.5.2 Implémentation de la boucle de rétroaction

Pour la réalisation de la boucle de contre-réaction, nous nous sommes inspirés de la technique utilisée dans [91]. Le schéma de principe est présenté Figure 4.13 et consiste à mesurer puis à démoduler les deux quadratures du mouvement à une fréquence angulaire ω_d proche de la fréquence de résonance. Le signal de détection $e(t)$

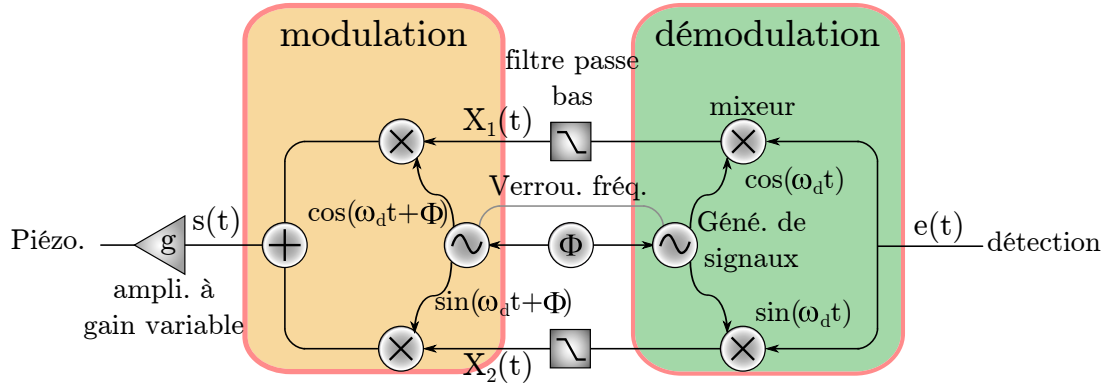


Fig. 4.13 Schéma d'implémentation de la boucle de contre-réaction pour l'application d'une force de friction froide.

retranscrit la position $x(t)$ du résonateur. On peut décomposer ce signal dans l'espace des phases :

$$e(t) \propto x(t) = X_1(t) \cos(\omega_d t) + X_2(t) \sin(\omega_d t), \quad (4.5.9)$$

où X_1 et X_2 sont les quadratures du mouvement lentement variables. La première moitié du montage est l'étage de démodulation qui permet d'extraire les quadratures à ω_d en mixant le signal avec un sinus et un cosinus. Le filtre passe bas élimine les composantes à $2\omega_d$ créées par le mixage. Sa fréquence de coupure est même réduite à 10 kHz pour sélectionner, dans le signal d'entrée $e(t)$, uniquement la réponse d'un mode mécanique. La boucle de contre-réaction n'agira ainsi que sur une très faible plage de fréquences évitant de saturer l'électronique ou d'engendrer des instabilités de type paramétriques (chauffage ou oscillation) d'un autre mode mécanique. Les quadratures X_1 et X_2 sont ensuite re-modulées à la fréquence ω_d mais par des signaux déphasés d'une phase ϕ contrôlable. Le signal de sortie $s(t)$ est donc :

$$s(t) = X_1(t) \cos(\omega_d t + \phi) + X_2(t) \sin(\omega_d t + \phi). \quad (4.5.10)$$

Le montage permet de choisir aisément la phase ϕ , la fréquence centrale ω_d ainsi que la bande passante de la contre-réaction. Ce signal $s(t)$ passe ensuite par un amplificateur à gain g variable avant d'être injecté sur la cale piézoélectrique supportant l'échantillon.

Le contrôle de la phase relative entre la démodulation et la modulation est particulièrement important puisque que c'est elle qui va déterminer le régime dans lequel notre résonateur sera : chauffage, refroidissement, ou raideur artificielle, voir équation 4.5.5. Il serait même en principe possible d'imposer un gain différent sur les quadratures X_1 et X_2 , voire de mettre des gains de signes opposés en remplaçant le second sommateur par un soustracteur. On obtiendrait alors des distributions non thermiques du mouvement du résonateur qui présenteraient un profil comprimé (réduction du bruit selon une quadrature, augmentation selon l'autre) [28].

4.5.3 Mesures de refroidissement

Pour cette expérience, nous avons utilisé une membrane de type tambour $30 \times 30 \mu\text{m}^2$ mise en cavité avec un μRoC de transmission 0.14%. Pour cette expérience, la cavité est maintenue à résonance avec le laser, et la mesure de déplacement est effectuée par la détection homodyne. Le spectre de bruit thermique de la nano-membrane est présenté sur la figure 4.14 (points verts), un ajustement lorentzien (courbe marron) permet d'extraire le taux d'amortissement. Nous avons ensuite branché la boucle de

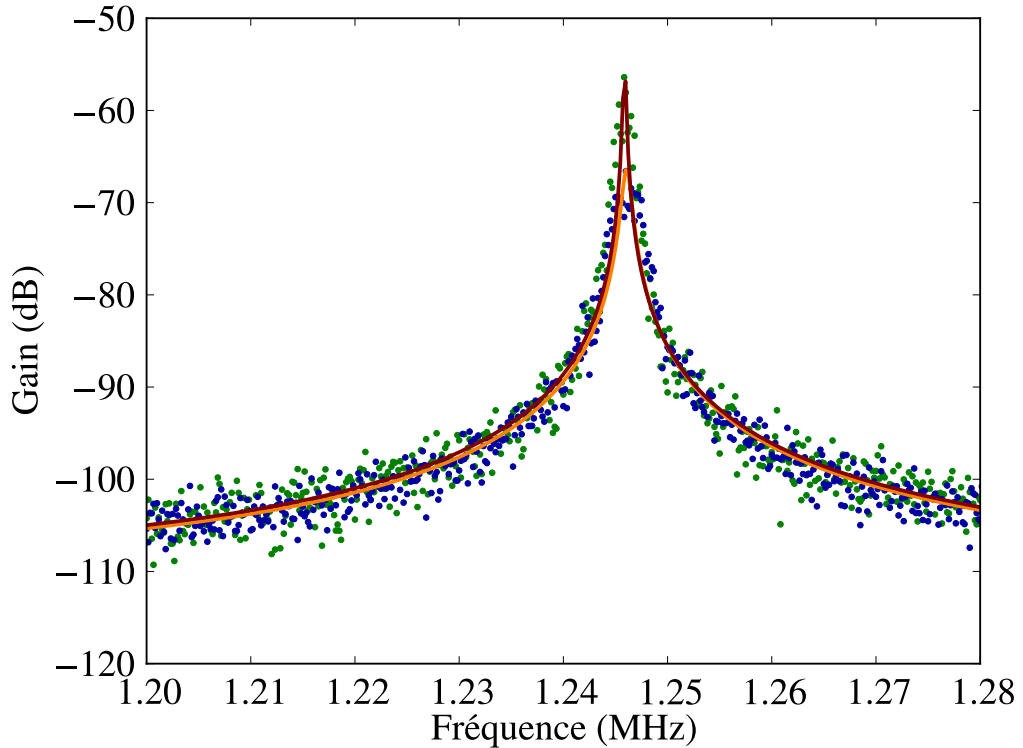


Fig. 4.14 Spectre de bruit thermique en l'absence (points verts) et présence (points bleus) de la contre-réaction

rétroaction, avec une fréquence de (dé)modulation de 1.245 MHz. Nous avons ensuite modifié la phase relative entre la modulation et la démodulation pour nous trouver dans le régime de refroidissement, ce qui a permis d'obtenir le spectre présenté Figure 4.14 (points bleus). Un ajustement lorentzien (courbe jaune) de ce spectre permet de déterminer son taux d'amortissement ainsi que son amplitude à résonance. Les ajustements lorentziens des courbes thermique et refroidie donnent : $\Gamma_m/2\pi = 224 \text{ Hz}$ et $\Gamma_{eff}/2\pi = 842 \text{ Hz}$. Ce qui donne comme gain de la boucle de contre-réaction 2.75. En considérant le rapport des amplitudes de réponse à résonance, nous obtenons 2.96. Les deux valeurs sont bien compatibles. Ce résultat montre que le mode mécanique a été refroidi d'un facteur $\simeq 4$, sa température effective vaut 83 K.

4.5.4 L'auto refroidissement

Les effets de refroidissement peuvent être obtenus sans utiliser de boucle de rétroaction, mais directement avec des effets de pression de radiation ou photothermiques dans la cavité. Appelés “laser cooling” ou “self cooling” ces effets ont été pour la première fois mis en évidence en 2006 par le groupe et simultanément par le groupe de M. Aspelmeyer [3, 92].

Qu'ils proviennent de la pression de radiation ou d'effets thermiques, ces phénomènes apparaissent lorsque la cavité optique est maintenue hors résonance. Dans cette configuration, l'intensité intracavité est modulée par les petits déplacements du résonateur (voir figure 4.15). Cette modulation s'accompagne d'un déphasage dû soit au

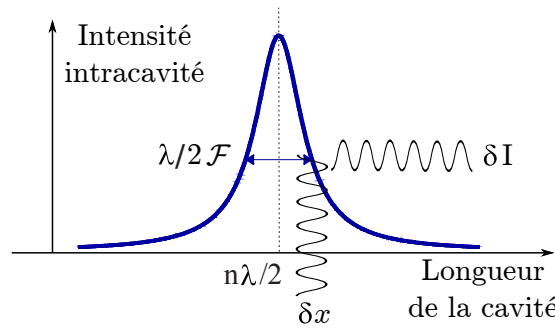


Fig. 4.15 Variations de l'intensité intracavité provoquées par de petits déplacements lorsque la cavité est hors résonance.

temps de vie des photons dans la cavité, soit au temps de thermalisation produisant l'effet de refroidissement.

Refroidissement laser par pression de radiation

L'effet de pression de radiation prend son origine dans l'interaction entre les photons et un miroir lors de leur réflexion, lorsque ceux-ci transfèrent leur impulsion au miroir. La pression de radiation possède à la fois un effet statique et dynamique. La partie statique modifie la position au repos du résonateur. La longueur de la cavité optique dépend alors de l'intensité intracavité et modifie alors le pic d'Airy jusqu'à l'apparition d'une bistabilité à forte intensité incidente [93]. La partie dynamique provoquée par les déplacements du résonateur est, quant à elle, responsable d'une modification de la réponse du résonateur. Ces effets sont bien connus et étudiés dans la communauté des ondes gravitationnelles. Ils furent d'abord observés expérimentalement en tant que ressort optique [94, 95] puis, plus récemment, les effets de refroidissement ont été observés [92, 3]. Ces phénomènes ne sont possibles que si l'intensité intracavité dépend de la position du miroir, il faut donc que la cavité soit désaccordée, puisqu'à résonance $\frac{dI}{d\Psi}|_{\Psi=0} = 0$. Par contre, sur le flanc du pic d'Airy apparaît une dépendance des fluctuations de l'intensité intracavité vis-à-vis des fluctuations de longueur. De plus, il est facile de voir que le signe de la force dépend directement du signe des variations d'intensité du champ en fonction du déplacement du miroir et donc du signe du désaccord. La force de pression de radiation pourra alors amplifier ou contrebalancer les mouvements du miroir mobile.

Pour une cavité Fabry-Perot où la largeur spectrale de la cavité est grande devant la fréquence mécanique ($\omega_m \ll \omega_c$), la force générée par la pression de radiation a la forme [96] :

$$F_{rad}[\omega] = -2 \frac{\phi \phi_{NL}}{\Delta} M \omega_0^2 x[\omega], \quad (4.5.11)$$

avec

$$\Delta = (1 - i \frac{\omega}{\omega_c})^2 + \phi. \quad (4.5.12)$$

Ici $\phi = \psi/\gamma$ est le désaccord normalisé par les pertes de la cavité avec $\psi = 4\pi L_0/\lambda[2\pi]$, $\omega_c = \pi c/(2\mathcal{F}L_0)$ est la largeur spectrale de la cavité et ϕ_{NL} la phase non linéaire caractérisant le couplage optomécanique entre le résonateur et le champ. Cette dernière correspond au déphasage normalisé produit par l'effet de recul statique sur le résonateur, qui est donné par :

$$\phi_{NL} = \frac{8P\mathcal{F}}{\lambda c M \omega_m^2}, \quad (4.5.13)$$

où P est la puissance incidente, \mathcal{F} la finesse de la cavité, c la vitesse de la lumière, M la masse du miroir mobile. La fonction Δ traduit le déphasage induit par la bande passante de la cavité. La force F_{rad} possède ainsi une partie en phase avec le mouvement responsable d'une raideur supplémentaire et une partie en quadrature responsable du refroidissement. Les modifications de la fréquence de résonance et du coefficient d'amortissement sont données par [96] :

$$\omega_{eff} = \omega_m \left(1 + \text{Re} \left[\frac{\phi \phi_{NL}}{\Delta} \right] \right), \quad (4.5.14)$$

et

$$\Gamma_{eff} = \Gamma_m \left(1 + 2Q \text{Im} \left[\frac{\phi \phi_{NL}}{\Delta} \right] \right). \quad (4.5.15)$$

L'effet de pression de radiation peut donc lui aussi être utilisé pour refroidir le mouvement du miroir mobile, ce processus est le plus efficace pour une fréquence résonance de l'ordre de la bande passante de la cavité. Il a été montré que cette technique pouvait être utilisée pour refroidir le résonateur jusque dans son état quantique [96].

L'effet photothermique

L'effet photothermique, tout comme l'effet de pression de radiation, apparaît lorsque la cavité est désaccordée où les déplacements du résonateur provoquent des fluctuations d'intensité intracavité. Cependant, la rétroaction sur le résonateur provient de l'absorption de photons par le matériau, ce qui va engendrer par chauffage des contraintes. Contrairement à l'effet de pression de radiation, pour laquelle la seule constante de temps créant un déphasage entre la force et la réponse était le temps de vie du photon dans la cavité. Pour le cas de l'effet photothermique une autre constante de temps intervient, elle correspond au temps de l'absorption du photon et à l'établissement du gradient thermique. Les modifications de la fréquence et de l'amortissement sont données par [97] :

$$\omega_{eff}^2 = \omega_m^2 \left(1 - \frac{1}{M \omega_0^2} \beta \frac{1}{1 + \omega_0^2 \tau_{th}^2} \frac{dP_{abs}}{dx} \right), \quad (4.5.16)$$

et

$$\Gamma_{eff} = \Gamma_m \left(1 + \frac{Q_m}{M\omega_0^2} \beta \frac{\omega_0 \tau_{th}}{1 + \omega_0^2 \tau_{th}^2} \frac{dP_{abs}}{dx} \right), \quad (4.5.17)$$

où P_{abs} est l'énergie absorbée par le résonateur, soit $P_{abs} = AP_{cav}$ avec P_{cav} l'énergie intra-cavité, A le coefficient d'absorption du résonateur, τ_{th} le temps caractéristique photothermique et β un facteur qui caractérise les contraintes lors de l'absorption de puissance lumineuse. Nous voyons donc que dans le cas limite $Q\omega_0\tau_{th} \ll 1$, l'essentiel de l'effet contribue à la modification de la constante de raideur du résonateur, et lorsque $Q > \omega_0\tau_{th} \gg 1$ l'essentiel de l'effet photothermique contribue à l'amortissement du résonateur, enfin lorsque $\omega_0\tau_{th} \gg Q$ l'effet photothermique est négligeable.

Observation d'auto-refroidissement

Pour cette expérience, nous avons utilisé une membrane tambour $30 \times 30 \mu\text{m}^2$ mise en cavité avec le $\mu\text{RoC } S_{11}$ de transmission 0.14%. La Figure 4.16 présente les spectres thermiques obtenus en désaccordant la cavité. Les croix rouges représentent une mesure du spectre thermique à résonance, pour une intensité incidente de 1 mW et son ajustement lorentzien permettant d'extraire son facteur de qualité de 386. Les croix vertes représentent le spectre obtenu pour un désaccord à mi-pente du pic d'Airy avec une puissance incidente de 10 mW, avec son ajustement lorentzien nous donnant un facteur de qualité d'environ 77. La courbe bleue est obtenue dans les mêmes conditions mais pour un désaccord positif. Le résonateur part clairement en instabilité paramétrique. Ces mesures ont été faites à une pression de 10^{-2} mbar. Le pic de modulation à 1.05 MHz fournit la référence de déplacement permettant l'ajustement du niveau des courbes.

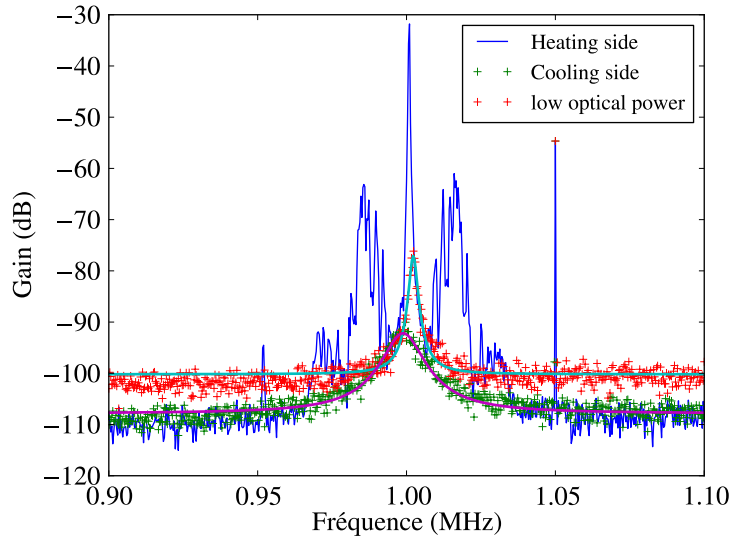


Fig. 4.16 Mesures de refroidissement et chauffage d'un mode mécanique par effet photothermique.

Paramètre	Thermique	Refroidissement
f_0 (MHz)	1.002266	0.998840
$\Gamma/2\pi$ (kHz)	2594	12997
Aire	0.167	0.419

Fig. 4.17 Paramètre des ajustements lorentzien des spectres thermiques.

Grâce aux ajustements des courbes thermique et refroidie, et en appliquant le théorème fluctuations-dissipation, nous obtenons une réduction de température $T_{eff}/T = \Gamma_{eff}/\Gamma_m$ d'un facteur 5, soit une température effective de 70 K.

Grâce aux proportions relatives de refroidissement et de ressort optique, on peut estimer la part de la pression de radiation et de photothermique dans l'effet observé.

D'après l'équation 4.5.12 nous voyons que dans la configuration où $\omega_m \ll \omega_c$, ce qui est notre cas avec $\omega_m/2\pi \simeq 1$ MHz et $\omega_c/2\pi \simeq 5$ GHz, la force de pression de radiation aura une partie imaginaire très faible et l'effet sera principalement un effet de ressort optique. En effet, dans ce cas le temps de vie d'un photon dans la cavité est bien inférieur à la période d'oscillation mécanique. Le champ intracavité varie donc sans délai par rapport aux mouvements du résonateur et la force de pression de radiation est en phase avec celui-ci. Avec les paramètres du système, une puissance laser incidente de $P = 10$ mW, une masse estimée à $M = 100$ pg, une finesse de $F = 150$, un facteur de qualité de $Q \simeq 400$, et un désaccord $\phi = 1$ soit au maximum de l'effet, on obtient une variation relative de l'amortissement $(\Gamma_{eff} - \Gamma_m)/\Gamma_m = 7.10^{-4}$ et de fréquence $(\omega_{eff} - \omega_m)/\omega_m = 5.10^{-3}$. Les effets de pression de radiation sont donc négligeables pour notre système dans la configuration où les mesures 4.16 ont été faites. L'effet observé est donc à plus de 99% un effet photothermique.

Conclusion

Dans cette partie, nous avons présenté la mise en cavité des membranes et le dispositif de mesure qui nous a permis d'accéder au mouvement brownien du résonateur à température ambiante. Nous avons réalisé une étude complète du bruit thermique de nos membranes et mis en place deux techniques de refroidissement actifs. Les résultats sur le contrôle du bruit thermique montrent une réduction de la température d'un facteur 4 à 5. Même si ce chiffre est modeste par rapport à ceux que l'on trouve dans la littérature, les résultats sont encourageants et pourraient facilement être améliorés. La force provoquée par la cale piézoélectrique est particulièrement peu efficace à des fréquences de l'ordre du MHz. Le recours à une force plus localisée et "large bande", comme la force électrostatique présentée dans le chapitre suivant, est un bien meilleur candidat pour le contrôle du mouvement de nos résonateurs.

Chapitre 5

Couplage capacitif d'une nano-membrane à cristal photonique

Dans ce chapitre nous présentons le développement de nano-membranes à cristal photonique couplées à un condensateur via la force électrostatique. Dans une première partie, nous développons un modèle analytique pour estimer l'effet de ce couplage capacitif, puis nous présenterons le procédé de fabrication. Enfin, nous discuterons des résultats obtenus avec les premiers échantillons que nous avons réalisés.

5.1 Modèle analytique pour un diélectrique dans un champ lointain stationnaire

Dans cette partie, nous allons nous intéresser au couplage électrostatique entre des électrodes interdigitées et une membrane diélectrique suspendue à proximité. Ce couplage est à double sens : les électrodes vont induire un champ électrique et donc une force électrostatique sur la membrane, et, réciproquement, les mouvements de la membrane vont modifier la capacité du condensateur formé par les électrodes et produire des fluctuations de tension. Dans les deux cas, le paramètre pertinent pour caractériser le couplage est la capacité électrique du système $C(x)$ en fonction de la position x de la membrane. Nous allons, dans un premier temps, calculer le champ électrique généré par un peigne d'électrodes interdigitées, voir Figure 5.1, en présence d'une membrane diélectrique afin de quantifier l'interaction électrostatique et d'optimiser la géométrie des électrodes. Dans un deuxième temps, nous nous intéresserons aux aspects dynamiques de cette interaction en regardant les modifications des propriétés mécaniques de la membrane.

5.1.1 Equation de Maxwell dans un diélectrique

La source

Nous inspirant des travaux réalisés par Den Otter [98] nous avons choisi de développer des électrodes interdigitées illustrées par la Figure 5.1 où p est la longueur des doigts, w leur largeur et s la distance de séparations des doigts. Afin de mener à bien le calcul permettant d'extraire les paramètres essentiels au développement de nos

électrodes, nous allons étudier le cas idéalisé où les doigts du peigne sont d'épaisseur nulle, se répètent à l'infini selon la direction Ox avec une périodicité de $2a$ ($a = s + w$) et sont invariants par translation suivant Oy .

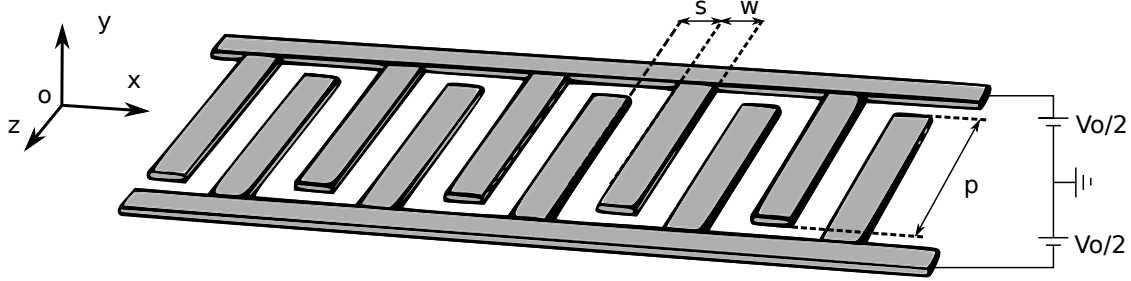


Fig. 5.1 Schéma des électrodes développées pour l'excitation par couplage capacitif

Les deux peignes d'électrodes sont soumis à des potentiels $\frac{V_0}{2}$ et $-\frac{V_0}{2}$. Pour calculer les champs créés dans le vide, il convient de partir de l'équation de Laplace :

$$\Delta V = 0. \quad (5.1.1)$$

L'origine de l'axe Ox est placée au milieu d'un des interstices séparant deux doigts. Les propriétés géométriques de la source et les symétries du problème vont imposer naturellement des contraintes sur le champ qu'elles produisent :

- $\frac{dV}{dz} = 0$ (invariance selon z) (5.1.2)

- $V(x, y) = -V(x + a, y) = V(x + 2a, y)$ (périodicité) (5.1.3)

- $V(-x, y) = V(x, y)$ (symétrie selon le plan zOy) (5.1.4)

- $V(x, 0) = V_0/2$ (pour $\frac{s}{2} < x < \frac{s}{2} + w$) (5.1.5)

Afin de résoudre analytiquement l'équation 5.1.1, nous utiliserons pour le potentiel V des fonctions "test" à variables séparées de la forme :

$$V(x, y) = V_x(x) \cdot V_y(y). \quad (5.1.6)$$

La périodicité des sources selon Ox (éq. 5.1.3) ainsi que la parité du potentiel (éq. 5.1.4) permettent de décomposer la fonction $V(x, y)$ en série de Fourier :

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\alpha_n x) V_n(y), \quad (5.1.7)$$

avec $\alpha_n = \frac{(2n-1)\pi}{a}$. En injectant l'expression de V dans l'équation 5.1.1 on obtient une équation vérifiée par les V_n :

$$V_n''(y) = \alpha_n^2 V_n(y). \quad (5.1.8)$$

V_n est donc une exponentielle décroissante (en ne conservant que la solution qui tend vers 0 à l'infini où il n'y a pas de charge). Au final, le potentiel a la forme suivante :

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\alpha_n x) e^{-\alpha_n |y|}. \quad (5.1.9)$$

Ce potentiel correspond à un champ électrique :

$$\vec{E} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha_n B_n \cos(\alpha_n x) e^{-\alpha_n |y|} \\ -\alpha_n B_n \sigma(y) \sin(\alpha_n x) e^{-\alpha_n |y|} \end{pmatrix}, \quad (5.1.10)$$

avec $\sigma(y)$ la fonction signe de y . Observant la forme du potentiel, nous voyons que la seule discontinuité est dans le plan $y=0$, où la dérivée de valeur absolue n'est pas définie, ce qui nous permet de calculer la charge surfacique des électrodes :

$$\sigma(x) = 2\epsilon_0 \left. \frac{dV}{dy} \right|_{y=0^+} = 2\epsilon_0 \sum_n \alpha_n B_n \sin(\alpha_n x), \quad (5.1.11)$$

le facteur 2 venant du fait que les charges se répartissent sur les deux faces des électrodes. La difficulté du problème est de trouver la forme des coefficients B_n remplissant les conditions sur V dans le plan $y = 0$. Ces conditions aux limites sont de deux sortes. D'une part, que le potentiel soit imposé au niveau des électrodes (éq. 5.1.5), et d'autre part, qu'il n'y ait pas de charge en dehors des électrodes : $\sigma(x) = 0$ pour $-s/2 < x < s/2$. Combiner ces conditions est très lourd mathématiquement. Cependant, il est possible d'avoir une bonne idée du champ dans tout l'espace avec des approximations, même grossières. Cela nous permettra de définir la géométrie des électrodes pour optimiser le couplage capacitif avec la membrane.

Champ électrique en l'absence de diélectrique

Dans le dispositif que l'on considère, la membrane est suspendue à une hauteur h au dessus du plan des électrodes. La présence de la membrane modifie évidemment le champ électrique produit par les électrodes comme nous le verrons dans la section 5.1.2. Cependant la forme du champ en l'absence de membrane donne une première vision des paramètres géométriques importants. Le critère est d'avoir un champ électrique maximal à la distance h des électrodes. Tout d'abord, voyant la décroissance exponentielle du champ en α_n , équation 5.1.10, le terme $n = 1$ est celui qui pénètre le plus loin dans les demi espaces $y > 0$ et $y < 0$. Il paraît alors intéressant de ne considérer que ce premier terme, qui aura alors la contribution la plus importante, ce qui nous mène à :

$$V(x, y) = \frac{V_0}{2} \sin(\alpha_1 x) e^{-\alpha_1 |y|}, \quad (5.1.12)$$

avec un champ électrique :

$$\|E\| = \frac{V_0}{2} \alpha_1 e^{-\alpha_1 |y|} \quad (5.1.13)$$

A tension V_0 fixée pour obtenir un champ maximal pour $y = h$, il est facile de montrer que le maximum de cette fonction est obtenue pour $a = \pi h$. La périodicité $2a$ du peigne d'électrode doit donc être choisie de l'ordre de $2\pi h$. Pour avoir l'influence du paramètre s sur le champ électrique, il est nécessaire d'utiliser des approximations plus fines pour le potentiel.

Repartant de l'équation 5.1.9, une très bonne approximation de la solution est donnée par den Otter dans [98]. Cette approximation consiste à imposer complètement le potentiel dans le plan $y = 0$. Il est pris uniforme égal à $V_0/2$ ou $-V_0/2$ dans les régions

correspondant aux électrodes et, entre les électrodes, il est pris égal au potentiel produit par deux demi plans coplanaires séparés par une distance s et dont la solution est connue. La justification de cette approximation vient du fait que pour deux plans infinis, la quasi-totalité des charges surfaciques contribuant au potentiel sont concentrées aux extrémités en regard de chaque demi plans, et donc que les charges plus profondes n'interviennent que très peu. L'idée des auteurs fut alors d'utiliser ce potentiel entre les doigts des électrodes, supposant que leur largeur est plus grande que la zone de répartition des charges surfacique du problème à deux demi plans. Dans ce cadre, den Otter donne la forme des coefficients de la série de Fourier du potentiel, soit :

$$B_n = \frac{4}{(2n-1)\pi} J_0\left(\frac{(2n-1)\pi s}{2a}\right). \quad (5.1.14)$$

Où J_0 l'ordre 0 de la fonction de Bessel de première espèce. Nous pouvons observer dès à présent que ces coefficients ne dépendent que du rapport s/a . Nous pouvons également noter les travaux d'Engan, [99], cité dans [98], qui permettent d'avoir la solution exacte, qui elle est très lourde calculatoirement. En ne considérant encore une fois que le coefficient B_1 pour le calcul du champ, on voit que le maximum est obtenu lorsque s tend vers a . C'est à dire pour un espacement petit entre les électrodes. Cependant en choisissant un paramètre $s/a = 1/2$, c'est à dire un espacement égal à la largeur des électrodes on ne perd que 15% sur la valeur du champ ($J_0(\pi/4) = 0.85$).

Capacité sans membrane

Avant d'étudier le système complet avec membrane il est intéressant de regarder la capacité du peigne d'électrodes seul dans le vide.

Capacité dans l'approximation grossière

Partant de l'équation 5.1.12, et l'injectant dans l'équation 5.1.11 nous trouvons une charge surfacique :

$$\sigma(x) = V_0 \epsilon_0 \alpha_1 \sin(\alpha_1 x) = \frac{\pi}{a} V_0 \epsilon_0 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right). \quad (5.1.15)$$

Dans cette approximation, le potentiel ne respecte pas l'équation 5.1.5 et des charges sont présentes entre les électrodes. Pour obtenir la charge totale il faut donc intégrer de 0 à a . Ce qui nous donne :

$$q = \int_0^a \sigma(x) dx = 2V_0 \epsilon_0. \quad (5.1.16)$$

La capacité étant définie comme le rapport entre la charge totale d'une des armatures sur la différence de potentiel appliquée entre les deux électrodes nous trouvons donc une capacité par paire de dents du peigne de :

$$C_{paire} = \frac{q}{V_0} = 2\epsilon_0. \quad (5.1.17)$$

Souvenons nous que le nombre de paire de dents par unité de longueur est $1/(2a)$, nous avons donc une capacité totale surfacique de :

$$C_{plat} = \frac{\epsilon_0}{a}. \quad (5.1.18)$$

Cette approximation est sans doute un peu sévère car la capacité ne dépend pas de s . Il paraît alors intéressant de comparer cette valeur avec des solutions approximées moins grossièrement.

Capacité dans l'approximation de Den Otter

Passons maintenant au calcul de la capacité utilisant l'approximation de Den Otter. Partant du potentiel défini par les équations 5.1.14 et 5.1.9, il ne nous reste plus qu'à calculer la distribution de charges donnée par l'équation 5.1.11, puis de l'intégrer sur la largeur d'un doigt.

$$q = \int_{s/2}^{s/2+w} \sigma(x) dx = 2V_0\epsilon_0 \sum_n B_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi s}{2a}\right). \quad (5.1.19)$$

On obtient donc une capacité par paire de dents du peigne de :

$$C_{paire} = \frac{q}{V_0} = \sum_n 2\epsilon_0 B_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi s}{2a}\right). \quad (5.1.20)$$

En prenant en compte la densité d'électrodes nous obtenons pour capacité surfacique :

$$C_{Otter} = \frac{\epsilon_0}{a} \sum_n B_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi s}{2a}\right). \quad (5.1.21)$$

Comme précédemment nous voudrions tronquer le problème au premier ordre, pour obtenir une expression simple et avoir une idée de la dépendance en le paramètre s . En effet, prendre en compte plusieurs ordres s'avère très difficile en présence du diélectrique. Pour justifier la validité de cette approximation nous pouvons, par exemple, calculer les contributions énergétiques des premiers ordres, celles-ci sont :

$$\mathcal{E}_n = \int \frac{\epsilon_0}{2} E_n^2 \propto \epsilon_0 B_n^2 \frac{2n-1}{2a}. \quad (5.1.22)$$

Nous avons représenté, Figure 5.2, la contribution énergétique des cinq premiers termes

Fig. 5.2 *Energie électromagnétique des cinq premiers ordres de la série.*

en fonction du paramètre s/a . Excepté pour le cas d'électrodes très fines ($s/a < 0.4$), où les ordres élevés ont une contribution plus importante, nous voyons que l'essentiel de la contribution à l'énergie électromagnétique est contenue dans le premier terme, soit environ 92%. Nous pouvons donc tronquer la série précédente au premier ordre :

$$C_{tronquee} = \frac{\epsilon_0 B_1}{a} \cos\left(\frac{\pi s}{2a}\right) = \frac{\epsilon_0}{a} \frac{4}{\pi} J_0\left(\frac{\pi s}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi s}{2a}\right). \quad (5.1.23)$$

Capacité calculée par éléments finis

Pour pouvoir vérifier la validité des différentes approximations, nous avons ensuite procédé, à l'aide du logiciel commercial Comsol, à des simulations par éléments finis du système. Nous avons, pour ces simulations, utilisé des conditions périodiques sur une cellule élémentaire composée de deux électrodes de largeur s , séparées par une distance centre à centre a , plongées dans le vide. Nous avons voulu vérifier, dans un premier temps, si l'approximation qui consiste à ne garder que le premier terme dans la série de Fourier 5.1.9 est valide. Nous avons, pour cela, extrait des simulations quelques isopotentiellles auxquelles nous avons superposé les mêmes isopotentiellles pour la fonction $V(x,y)$ tronquée au premier ordre, définie par l'équation 5.1.12 (voir Figure 5.3).

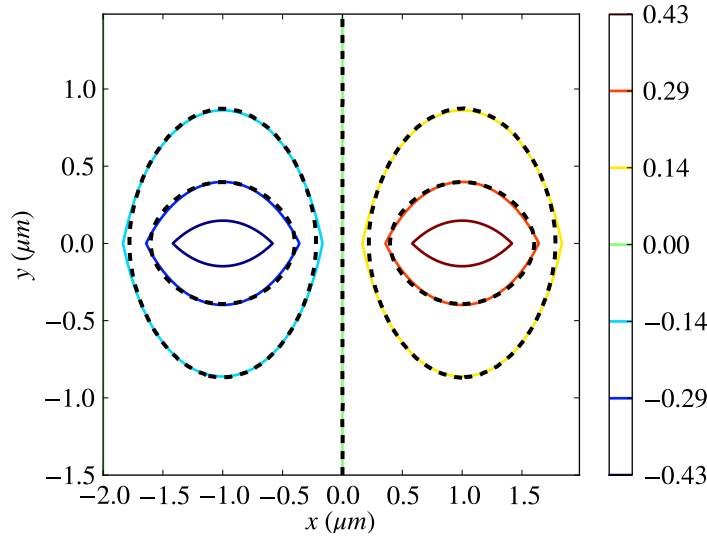


Fig. 5.3 Isopotentiellles simulées (lignes pointillées noires) et celles données par l'équation 5.1.12 (lignes colorées), pour -0.43 , -0.29 , -0.14 , 0 , 0.14 , 0.29 et 0.43 V.

On voit que le premier terme de la série des potentiels calculés sur une base de fonctions à variables séparables suffit à décrire très précisément la distribution du potentiel à partir d'une centaine de nanomètre, les courbes sont presque superposées. On peut remarquer qu'à quelques dizaines de nanomètres le premier terme seul ne suffit plus pour décrire les effets de champs proches, là où les termes de la série en $e^{-\alpha_n y}$ vont contribuer au maximum. Nous pouvons voir d'ailleurs que dans le plan $y = 0$ la dérivée du potentiel n'est pas continue en dehors des électrodes, ce qui correspond à la non nullité de la densité de charges due aux approximations.

Les calculs précédents sont basés sur l'hypothèse que les électrodes ont une épaisseur nulle. Cependant aussi bien pour les réalisations technologiques que pour nos simulations, nos électrodes ont une épaisseur non nulle. Bien qu'ayant voulu pour nos simulations par éléments finis prendre une épaisseur la plus faible possible, celle-ci est limitée par la résolution du maillage de la cellule de calcul, ce qui influe lourdement sur les ressources informatiques nécessaires. Nous avons donc simulé deux épaisseurs, une de $5nm$, et une autre plus proche des réalisations technologiques que nous ferons de $100nm$. Dans un premier temps, pour estimer la modification de la capacité due à l'épaisseur des électrodes, nous pouvons faire un simple calcul pour deux plaques

parallèles en regard dans le vide qui modéliseront les faces internes des doigts. Dans ce cas la capacité est :

$$C_{\text{plaque}} = \epsilon_0 \frac{S}{l} \quad (5.1.24)$$

où S est la surface d'une électrode et l la distance les séparants. Ce qui nous donne avec les paramètres de notre problème :

$$C_{\text{épaisseur}} = K \epsilon_0 \frac{pt}{s} \quad (5.1.25)$$

où p est la longueur des doigts, t leur épaisseur, le facteur K , qui, correspond au nombre d'espaces inter doigts pour une surface d'électrodes donnée. Maintenant, traçons la différence de capacité entre les deux simulations, ainsi que la différence entre C_{plaque} calculée pour une épaisseur de 100nm et celle de 5nm , voir Figure 5.4. Cette

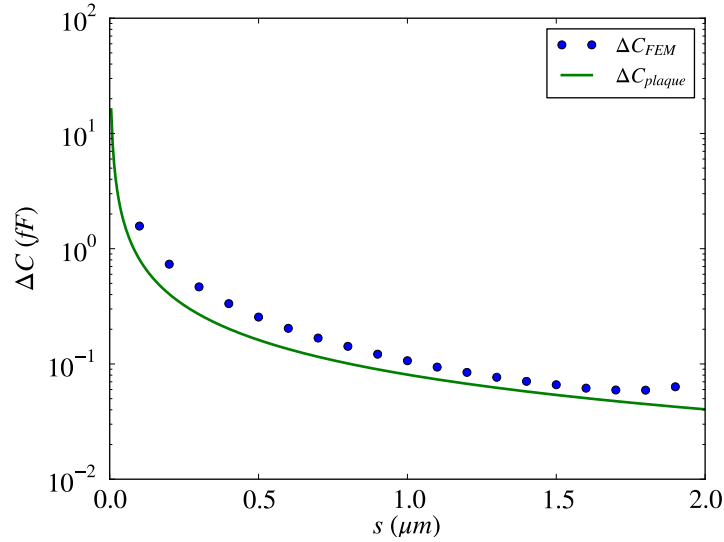


Fig. 5.4 Différence de capacité pour deux épaisseurs d'électrodes simulées (5 et 100 nm) comparé à la différences de capacité due à deux plaques séparées d'une distance s et respectivement de surface 10×100 et $10 \times 5 \text{ nm}^2$. Avec dans chaque cas $a = 2\mu\text{m}$, et pour un condensateur de surface $10 \times 20\mu\text{m}^2$.

grossière approximation de l'écart de capacité pour différentes épaisseurs semble plutôt satisfaisante pour les valeurs de $s/a > 1/2$, mais échoue pour les plus faibles valeurs de s , elle réussit néanmoins à prédire les bons ordres de grandeur.

Passons maintenant à la comparaison entre les capacités calculées précédemment et celles calculées par nos simulations. La Figure 5.5 présente la capacité C_{plat} , les capacités C_{Otter} calculées par la méthode proposées par den Otter au premier ordre et à un ordre arbitrairement élevé (1000), ainsi que celles simulées pour des épaisseurs d'électrodes de 5nm et 100nm , toutes calculées pour une surface du condensateur de $10 \times 20\mu\text{m}^2$. Il apparait qu'effectivement le modèle de Otter réussit à retranscrire le mieux les variations de la capacité pour une large gamme du paramètres s/a , et en particulier pour ses petites valeurs. Cependant, pour $s/a = 1/2$ l'approximation

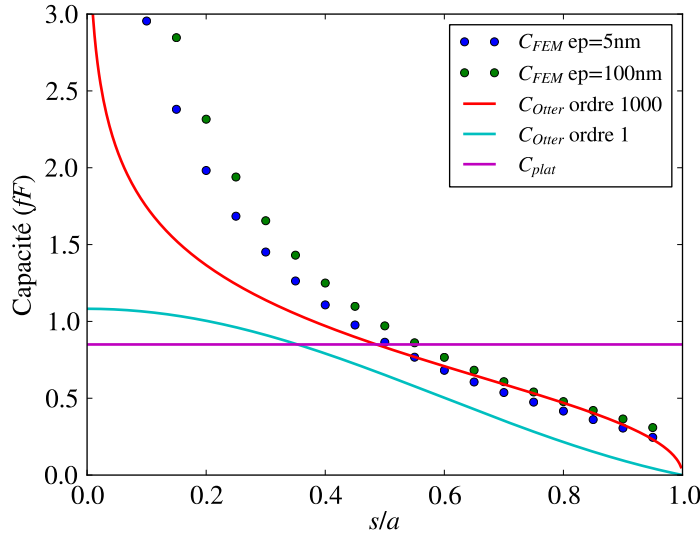


Fig. 5.5 Capacité pour un condensateur interdigité dans le vide d'un pad de $10 \times 20 \mu\text{m}^2$ en fonction du rapport s/a .

grossière faite en début de section ne diffère que de quelques pourcents et est en très bon accord avec la simulation faite pour une épaisseur de 5nm .

5.1.2 Capacité du peigne d'électrodes en présence d'une diélectrique épais

Nous allons maintenant étudier les modifications de la capacité produites par la présence d'une membrane diélectrique dont la configuration est celle présentée Figure 5.6. Le vecteur déplacement est la quantité intéressante pour décrire la modification du champ électrique par la présence du diélectrique :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}. \quad (5.1.26)$$

Le vecteur déplacement vérifie donc les équations de Maxwell, qui en l'absence de charge prennent la forme :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0, \quad (5.1.27)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{D} = \vec{0}. \quad (5.1.28)$$

Les champs \vec{D} et \vec{E} doivent, de plus, vérifier les relations de continuité aux interfaces :

$$\vec{D} \cdot \vec{n} = 0, \quad (5.1.29)$$

$$\vec{E}_t = 0, \quad (5.1.30)$$

avec \vec{n} le vecteur normal à l'interface et \vec{E}_t la composante tangentielle du champ. En prenant un champ dérivant d'un potentiel V , l'équation du rotationnel, eq. 5.1.28, est automatiquement vérifiée et celle de la divergence devient :

$$\Delta V = 0. \quad (5.1.31)$$

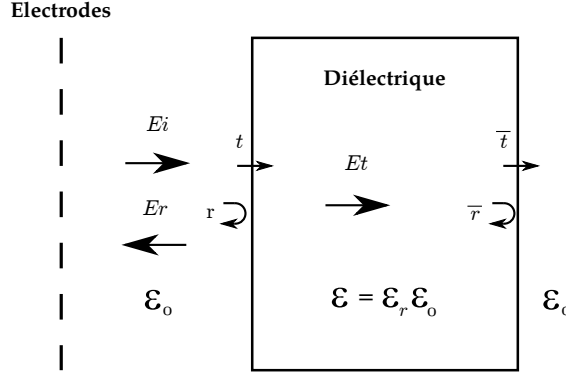


Fig. 5.6 Réflexion du champ évanescent à l'interface du diélectrique

Le champ créé par les électrodes dans le vide va, à l'interface vide/diélectrique, créer une distribution de charge vérifiant les relations 5.1.29 et 5.1.30. Cette distribution de charge va elle-même créer un champ qui, de nouveau, vérifiera dans le vide et dans le diélectrique le laplacien, eq. 5.1.31. Le diélectrique vérifiant les mêmes symétries que les électrodes, son champ induit aussi. Ainsi les champs créés par les électrodes et les charges induites dans le diélectrique auront alors les mêmes propriétés, et $V_{dielectrique}$ aura la même décomposition sur la base de V_n :

$$V_{dielectrique}(x, y < h) = rV_{electrodes}(x, 2h - y), \quad (5.1.32)$$

et

$$V_{dielectrique}(x, y > h) = tV_{electrodes}(x, y), \quad (5.1.33)$$

si bien que nous pouvons décrire les champs, en analogie complète avec les lois de Fresnel pour des champs variables, comme des superpositions de champs incidents, transmis et réfléchis. En effet, le champ incident, émis par les électrodes, peut être vu comme une onde évanescente qui décroît en fonction de la distance aux électrodes, qui à l'interface vide/diélectrique sera soit réfléchi continuant à décroître cette fois vers les $y < 0$, soit sera transmise et décroissant dans le diélectrique. Donc pour la région $y < h$ nous avons le champ généré par les électrodes et celui réfléchi par le diélectrique après s'être propagé sur la distance h , ce qui nous donne :

$$\vec{E}(x, y) = e_i \cdot \vec{E}_n(x, y) + e_r \cdot \vec{E}_n(x, 2h - y) \quad (5.1.34)$$

Et pour le demi espace $y > h$:

$$\vec{E}(x, y) = e_t \cdot \vec{E}_n(x, y) \quad (5.1.35)$$

Où les champs $\vec{E}_n(x, y)$ sont les champs décrits eq. 5.1.10.

Maintenant, utilisant la relation de passage eq. 5.1.30, imposant la continuité de la composante x du champ électrique, nous obtenons :

$$e_i + e_r = e_t \quad (5.1.36)$$

Puis, celle du vecteur déplacement, eq. 5.1.29, pour sa composante selon y :

$$\epsilon_r e_t = e_i - e_r, \quad (5.1.37)$$

ce qui donne :

$$e_r = e_i \frac{1 - \epsilon_r}{1 + \epsilon_r} \quad \text{et} \quad e_t = e_i \frac{2}{1 + \epsilon_r} \quad (5.1.38)$$

Ceci nous permet de définir l'analogie des coefficients de réflexion et de transmission, soit :

$$r = \frac{1 - \epsilon_r}{1 + \epsilon_r} \quad \text{et} \quad t = \frac{2}{1 + \epsilon_r}. \quad (5.1.39)$$

Vérifiant l'équation de conservation :

$$r^2 + \epsilon_r t^2 = 1. \quad (5.1.40)$$

De la même manière, nous pouvons définir les coefficients de réflexion et de transmission réciproques du diélectrique vers l'extérieur :

$$\bar{r} = \frac{\epsilon_r - 1}{1 + \epsilon_r} \quad \text{et} \quad \bar{t} = \frac{2\epsilon_r}{1 + \epsilon_r}. \quad (5.1.41)$$

Vérifiant l'équation de conservation :

$$\bar{r}^2 + \frac{1}{\epsilon_r} \bar{t}^2 = 1. \quad (5.1.42)$$

5.1.3 Cas d'une membrane épaisse.

Dans un premier temps, on considère une membrane épaisse occupant un demi espace complet. Dans cette situation, les électrodes interdigitées se trouvent dans les plans $y = 0$ et tout le demi espace $y > h$ est occupé par un diélectrique de permittivité relative ϵ_r . Nous avons donc deux plans de charges, un à $y = 0$ correspondant aux électrodes et un en $y = h$ correspondant aux charges créées à l'interface diélectrique/air par ce premier champ, nous pouvons donc écrire le potentiel comme la somme de ces deux contributions :

$$V(x, y = 0) = V_{\text{electrodes}} + V_{\text{dielectrique}} = V_{\text{electrodes}}(1 + r e^{-2\alpha_1 h}). \quad (5.1.43)$$

Le potentiel de l'électrode est donc modifié par la réflexion venant du diélectrique. Nous allons faire l'hypothèse que B_1 est le seul terme non nul, comme pour l'approximation grossière faite en section 5.1.1. Celle-ci est d'autant plus justifiée qu'ici nous nous intéressons aux effets loin des électrodes, où les ordres plus élevés subissent une décroissance exponentielle rapide. Dans ce cas, l'expression modifiée par le diélectrique de la capacité est :

$$C = \frac{q}{V} = V_0 \frac{\epsilon_0}{a} \frac{1}{V_0(1 + r e^{-2\alpha_1 h})} \quad (5.1.44)$$

$$C = \frac{C_0}{1 + r e^{-2\alpha_1 h}}. \quad (5.1.45)$$

La Figure 5.7 compare la capacité simulée par la méthode des éléments finis pour une épaisseur des électrodes de $5nm$, à la capacité théorique C_{plat} dérivée précédemment, eq 5.1.18, pour un peigne d'électrodes en présence d'un diélectrique "semi infini", avec $a = 2\mu m$ et $s/a = 1/2$. En réalité, aussi bien pour la simulation que pour le calcul

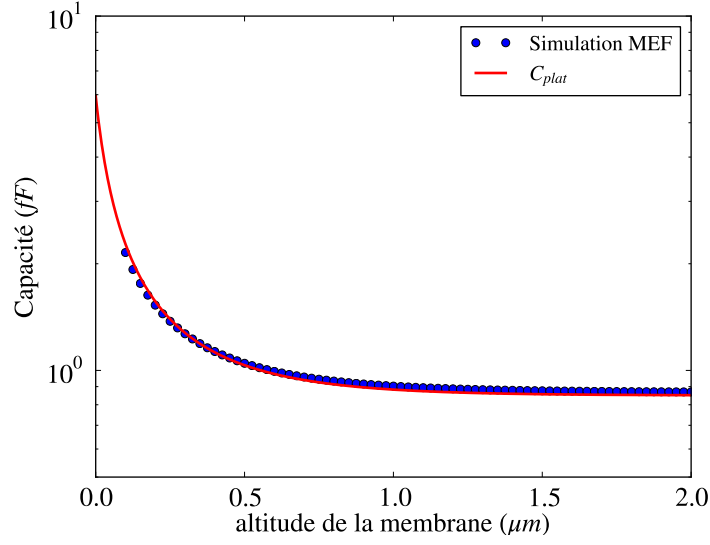


Fig. 5.7 Comparaison des capacités prédites pour une membrane semi infinie entre les approximations et la simulation, pour $a = 2\mu m$ et $\epsilon_r = 13$, pour des électrodes de surface $10 \times 20\mu m^2$.

théorique, nous avons pris une épaisseur de membrane de $5\mu m$ qui, comme nous le verrons Figure 5.9, peut être déjà considérée comme infinie. On observe alors que les valeurs de la capacité simulée avec une épaisseur d'électrodes de 5 nm sont en très bon accord avec l'approximation faite equation 5.1.18.

Il paraît intéressant, dès à présent, de regarder pour une altitude donnée de notre diélectrique la géométrie des électrodes qui maximiserait le couplage entre la mouvement de notre diélectrique et la variation de capacité du condensateur. Reprenant l'expression 5.1.45, nous avons :

$$\frac{dC}{dh} = \frac{2\alpha_1 r C_0(\alpha_1) e^{-2\alpha_1 h}}{(1 + r e^{-2\alpha_1 h})^2}. \quad (5.1.46)$$

Comme nous gardons constante l'altitude la membrane et voulons trouver les bons paramètres géométriques du peigne pour maximiser ce couplage, nous cherchons le point d'annulation de la dérivée de $\frac{dC}{dh}$ par rapport à α_1 :

$$\frac{d^2C}{d\alpha_1 dh} = \frac{2\alpha_1 e^{-2\alpha_1 h} [(1 - h\alpha_1)(1 + r e^{-2\alpha_1 h}) + 2rh\alpha_1 e^{-2\alpha_1 h}]}{(1 + r e^{-2\alpha_1 h})^3}. \quad (5.1.47)$$

Cette expression s'annule lorsque

$$\frac{\alpha_1 h - 1}{\alpha_1 h + 1} e^{2\alpha_1 h} = r. \quad (5.1.48)$$

La Figure 5.8 présente la fonction $f(x) = \frac{x-1}{x+1} e^{2x}$.

On peut alors résoudre graphiquement l'équation 5.1.48. Lorsque r tend vers 0, ce qui correspond à un diélectrique faible, le champ des électrodes est très peu modifié

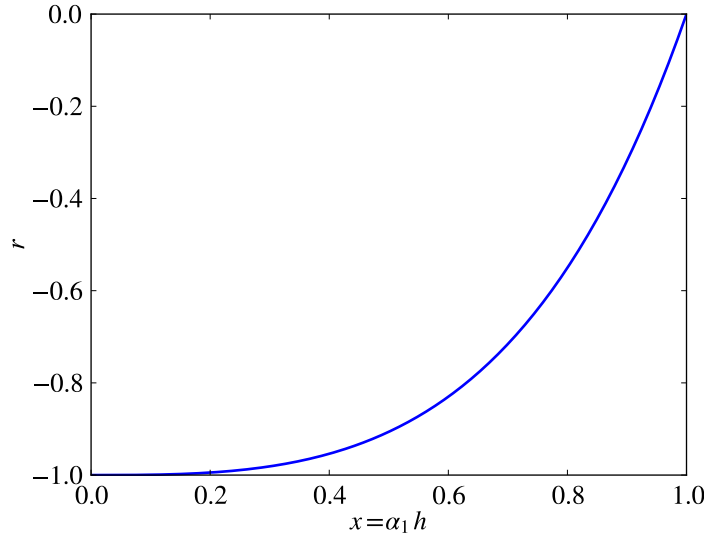


Fig. 5.8 Produit $x = \alpha_1 h$ maximisant le couplage à altitude donnée de la membrane (h) pour les différentes valeurs de la réflectivité.

et l'on retrouve un optimum pour $\alpha_1 h = 1$ c'est à dire $a = \pi h$, c'est le résultat de la section 5.1.1. Réciproquement, pour un fort diélectrique r tend vers -1 et l'optimum pour a tend vers l'infini. Cependant, cette limite est atteinte lentement et il faut un coefficient de -0.9 pour avoir le paramètre a double par rapport à la situation à faible diélectrique.

5.1.4 Cas d'une membrane fine

Passons maintenant au cas d'une membrane fine, il nous faut pour cela prendre en compte la réflexion et la transmission de la deuxième interface, faisant intervenir les coefficients réciproques introduits dans la section 5.1.2. En sommant toutes les réflexions multiples sur les deux interfaces nous obtenons un coefficient de réflexion effectif :

$$r_{eff} = r + t\bar{t}\bar{r}^{-1} \sum_n (\bar{r}^2 e^{-2\alpha_1 h_0})^n \quad (5.1.49)$$

$$= r + \frac{t\bar{t}\bar{r}e^{-2\alpha_1 h_0}}{1 - \bar{r}^2 e^{-2\alpha_1 h_0}} \quad (5.1.50)$$

$$= \frac{(\epsilon_r^2 - 1)(e^{-2\alpha_1 h_0} - 1)}{(\epsilon_r + 1)^2 - (\epsilon_r - 1)^2 e^{-2\alpha_1 h_0}} \quad (5.1.51)$$

Avec h_0 l'épaisseur de la membrane.

Figure 5.9 représente le facteur de réflexion effective en fonction de l'épaisseur de la membrane. Nous voyons que, pour une épaisseur de $1\mu m$, ce coefficient a déjà convergé vers la valeur asymptotique représentée par la ligne pointillée verte, soit $r_{eff} = -0.857$. La ligne pointillée verticale rouge représente l'épaisseur de la membrane que nous

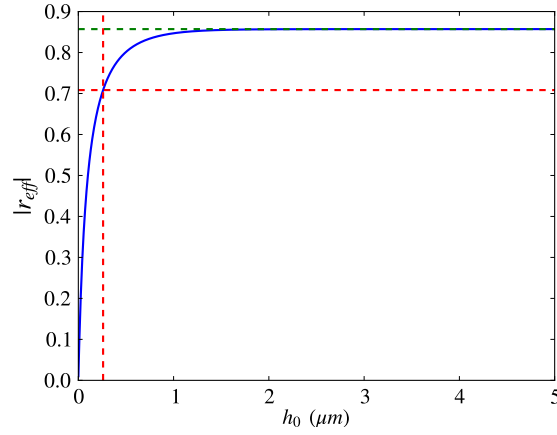


Fig. 5.9 Réflexion en fonction de l'épaisseur de la membrane pour $a = 2\mu m$ et $\epsilon_r = 13$.

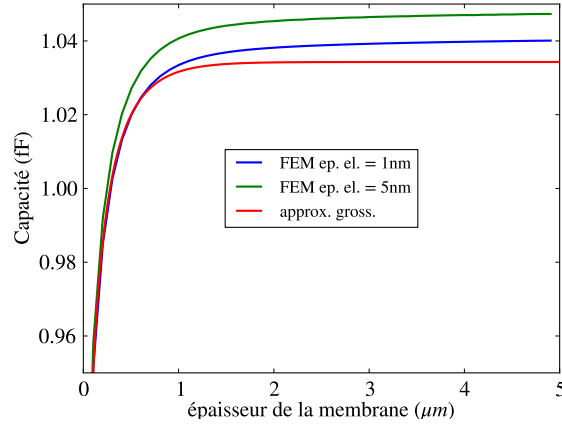


Fig. 5.10 Capacité en fonction de l'épaisseur de la membrane pour $a = 2\mu m$, $\epsilon_r = 13$ et une altitude de $0.5\mu m$.

développerons, et qui a une épaisseur de $0.26\mu m$, ce qui correspond à un coefficient de réflectivité effectif de -0.708 . L'expression de la capacité est alors :

$$C = \frac{q}{V} = \frac{C_0}{1 + r_{eff}e^{-2\alpha_1 h}}. \quad (5.1.52)$$

La Figure 5.10 présente la dépendance de la capacité en fonction de l'épaisseur de la membrane, comparant toujours les valeurs théoriques du modèle aux simulations faites par la méthode des éléments finis pour un peigne d'électrodes en présence d'une membrane diélectrique d'épaisseur $0.26\mu m$. Nous avons simulé deux épaisseurs d'électrodes 5 et 1 nm, on observe encore une fois une légère différence (moins de 1%) entre les simulations et la prédiction du modèle, inhérente à l'épaisseur non nulle des électrodes.

La Figure 5.11 représente la dépendance des capacités simulées par la méthode des éléments finis et la capacité théorique calculée précédemment en fonction de la position du diélectrique. Nous avons, pour cela, simulé deux épaisseurs d'électrodes 5

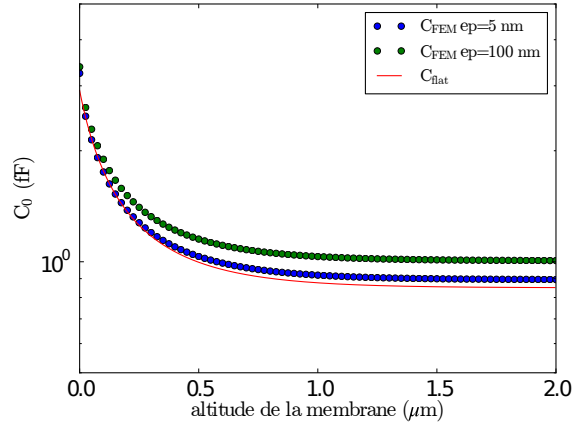


Fig. 5.11 Comparaison des capacité prédites pour une membrane d'épaisseur $0.26\mu\text{m}$ entre les approximations et la simulation, pour $a = 2\mu\text{m}$ et $\epsilon_r = 13$.

et 100 nm . On observe, une fois de plus, un très bon accord entre prédiction théorique et simulation pour la plus faible des épaisseurs d'électrodes. La modification de la capacité, due à la l'épaisseur finie des électrodes, peut être vue comme l'ajout d'une capacité due aux faces internes des électrodes. Le calcul nous donne les bons ordres de grandeur puisque nous trouvons par les simulations une différence de 0.14 fF entre ces deux épaisseurs et nous calculons $\Delta C_{ad} = 0.08\text{ fF}$.

Il est intéressant de calculer le couplage optimal à une altitude donnée de la membrane. Comme le montre l'expression 5.1.49, la réflectivité effective de la membrane va dépendre du paramètre α_1 , nous de pouvons donc plus utiliser l'expression 5.1.48 pour trouver cet optimum. La Figure 5.12 présente cette dépendance :

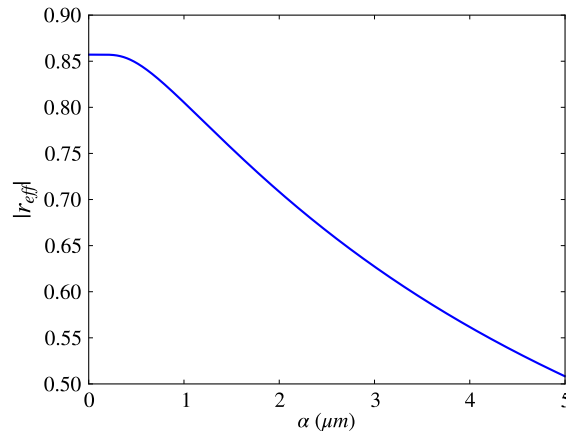


Fig. 5.12 Réflexion en fonction de du paramètre α_1 pour une épaisseur de la membrane de $0.26\mu\text{m}$ et $\epsilon_r = 13$.

Pour trouver la valeur de α_1 rendant le couplage optimal, il nous faut donc maximiser numériquement l'équation 5.1.46 en remplaçant r par l'expression de r_{eff} donnée

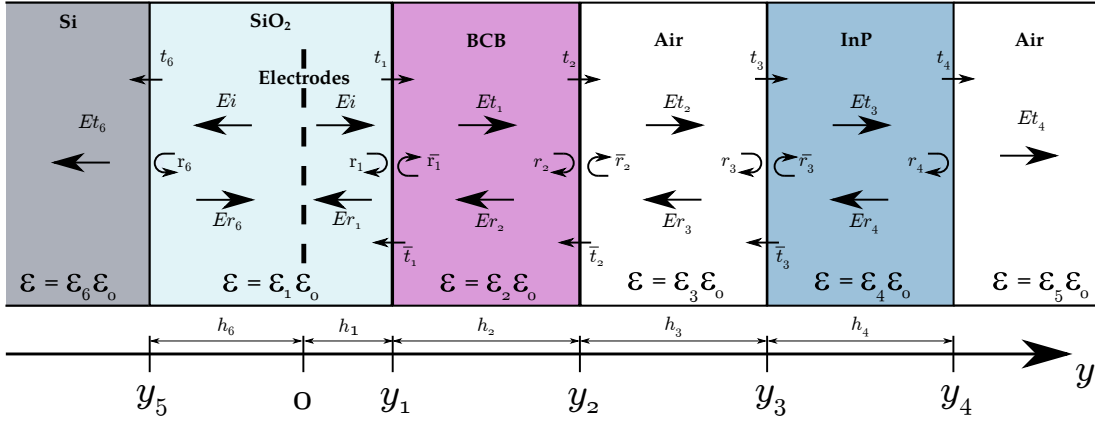


Fig. 5.13 Illustration des différentes couches de diélectrique composant les échantillons fins, avec $h_6 = 1\mu m$, $h_1 = 100nm$, $h_2 = 200nm$, $h_3 = 200nm$, $h_4 = 0.26nm$; et $\epsilon_6 = 11.7$, $\epsilon_1 = 3.9$, $\epsilon_2 = 2.7$, $\epsilon_3 = \epsilon_5 = 1$ et $\epsilon_4 = 13$.

par l'expression 5.1.50. Ceci nous donne, pour une membrane d'épaisseur $0.26\mu m$ à une altitude de $0.5\mu m$ et de permittivité 13, le paramètre $a = \pi/\alpha \simeq 1.75\mu m$ et un couplage $\frac{dC}{dh} \simeq -0.522nF/m$.

5.1.5 Multicouche

Comme nous le verrons dans la prochaine section, notre dispositif sera composé de plusieurs couches de diélectriques qu'il faut prendre en compte pour le calcul de la capacité. La situation est celle décrite par la Figure 5.13, les électrodes sont encapsulées dans un milieu de permittivité relative ϵ_1 , auquel s'ajoute un empilement d'autres couches de diélectrique d'indices et d'épaisseurs différents. Pour pousser le réalisme du modèle, nous allons donc chercher à établir l'expression de la capacité dans cette configuration.

Pour cela, il nous faut calculer le coefficient de réflexion effectif qui modélisera la contribution de l'ensemble des couches de diélectrique. Partons du cas où seules les trois premières couches sont présentes, le substrat de silicium, les couches de d'oxyde de silice et de BCB. Cette situation est très proche que celle décrite dans la section 5.1.4, il nous faut en plus prendre en compte l'effet de la deuxième interface (en $y < 0$) entre le SiO_2 et le Si et des multiples réflexions qu'il peut y avoir entre ces deux premières interfaces. De la même manière que nous avons établi l'équation 5.1.43 pour avoir la forme du potentiel dû à l'interface en fonction de celui des électrodes nous allons déterminer $V_{dielectriques}$ qui va devoir prendre en compte les réflexions multiples entre les deux interfaces, ce qui donne :

$$V_{dielectriques} = V_0 \frac{r_6 e^{-2h_6 \alpha_1} + r_1 e^{-2h_1 \alpha_1} (1 + 2r_6 e^{-2h_6 \alpha_1})}{1 - r_1 r_6 e^{-2(h_1 + h_6) \alpha_1}}. \quad (5.1.53)$$

Maintenant, suivant l'idée menant à l'équation 5.1.49 pour chaque couche successive de diélectrique, nous allons substituer les coefficients de réflexion pour ceux de réflexion

effective prenant en compte les effets des couches suivantes, ce qui nous donne :

$$V_{dielectriques} = V_0 \frac{r_6 e^{-2h_6 \alpha_1} + r_{1_{eff}} e^{-2h_1 \alpha_1} (1 + 2r_6 e^{-2h_6 \alpha_1})}{1 - r_{1_{eff}} r_6 e^{-2(h_1 + h_6) \alpha_1}}, \quad (5.1.54)$$

$$r_{1_{eff}} = r_1 + \frac{t_1 \bar{t}_1 r_{2_{eff}} e^{-2\alpha h_2}}{1 - \bar{r}_1 r_{2_{eff}} e^{-2\alpha h_2}}, \quad (5.1.55)$$

$$r_{2_{eff}} = r_2 + \frac{t_2 \bar{t}_2 r_{3_{eff}} e^{-2\alpha h_3}}{1 - \bar{r}_2 r_{3_{eff}} e^{-2\alpha h_3}}, \quad (5.1.56)$$

$$r_{3_{eff}} = r_3 + \frac{t_3 \bar{t}_3 r_4 e^{-2\alpha h_4}}{1 - \bar{r}_3 r_4 e^{-2\alpha h_4}}. \quad (5.1.57)$$

Et, en utilisant les conditions de continuité aux interfaces, nous pouvons calculer les différents coefficients de transmission et de réflexion. Nous avons donc :

$$r_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}, \quad t_1 = \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2}, \quad (5.1.58)$$

$$r_2 = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_3}{\epsilon_2 + \epsilon_3}, \quad t_2 = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_3}, \quad (5.1.59)$$

$$r_3 = \frac{\epsilon_3 - \epsilon_4}{\epsilon_3 + \epsilon_4}, \quad t_3 = \frac{2\epsilon_3}{\epsilon_3 + \epsilon_4}, \quad (5.1.60)$$

$$r_4 = \frac{\epsilon_4 - \epsilon_5}{\epsilon_4 + \epsilon_5}, \quad t_4 = \frac{2\epsilon_4}{\epsilon_4 + \epsilon_5}, \quad (5.1.61)$$

$$r_6 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_6}{\epsilon_1 + \epsilon_6}. \quad (5.1.62)$$

Pour obtenir les coefficients réciproques \bar{t}_i et \bar{r}_i , il nous suffira de substituer les ϵ_i par ϵ_i^{-1} . Ceci permet de déterminer la forme de la capacité avec les nouveaux paramètres du problème qui s'écrit comme :

$$C_{sarco} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_1}{a} \frac{1 - r_{1_{eff}} r_6 e^{-2(h_1 + h_6) \alpha_1}}{1 + r_6 e^{-2h_6 \alpha_1} + r_{1_{eff}} e^{-2h_1 \alpha_1} (1 + r_6 e^{-2h_6 \alpha_1})} \quad (5.1.63)$$

Il faut garder à l'esprit que la position de la membrane n'apparaît plus explicitement dans l'expression de la capacité mais elle est cachée dans la réflectivité effective à travers le coefficient $r_{2_{eff}}$ où h_3 représente la position de la membrane. Ce qui nous donne pour un substrat de silicium ($\epsilon_6 = 11.7$), avec des électrodes encapsulées dans du dioxyde de silicium ($\epsilon_1 = 3.9$) séparées de 100 nm (h_1) d'une couche de 200 nm (h_2) de BCB ($\epsilon_2 = 2.65$), elle-même surplombée par 200 nm (h_3) d'air ($\epsilon_3 = \epsilon_5 = 1$) et enfin notre membrane de 260 nm d'épaisseur (h_3) en InP ($\epsilon_4 = 13$). La Figure 5.14 montre la dépendance de la capacité du système en fonction de l'altitude de la membrane, elle compare la simulation faite par éléments finis et la prédiction de notre modèle.

Nous allons, à présent, déterminer le paramètre a pour maximiser le couplage entre la membrane et les électrodes, contrairement à l'équation 5.1.46 une expression simple de $\frac{dC}{dh_3}$ est difficilement trouvable. La Figure 5.15 droite présente ses variations en fonction des paramètres $a = \pi/\alpha$ et $y_3 = h_1 + h_2 + h_3$ et celle de gauche nous présente

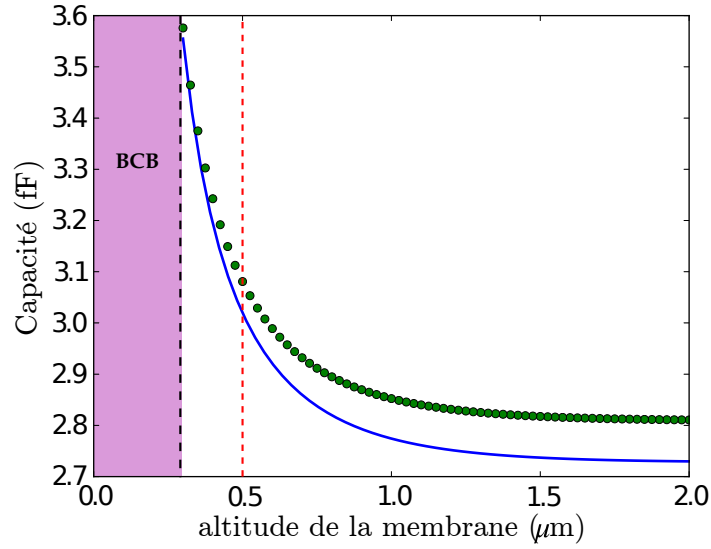


Fig. 5.14 Capacité simulée (point vert) et prédite (ligne bleue) de notre dispositif final, l'altitude des membranes des échantillons est représentée par la ligne pointillée rouge. La simulation est faite avec des électrodes d'une épaisseur de 5 nm.

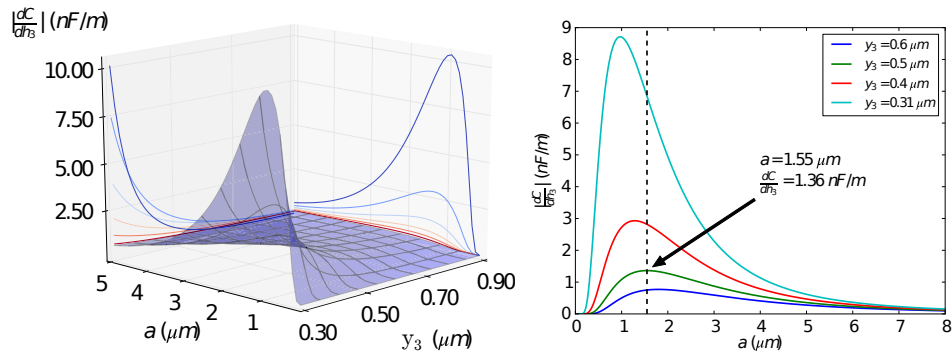


Fig. 5.15 Droite : Carte 3D de $\frac{dC}{dh_3}$ en fonction des paramètres a et y_3 . Gauche : Projection de la carte 3d pour des valeurs de y_3 de 0.6, 0.5, 0.4 et 0.31 μm

les variations en fonction de a pour des valeurs de y_3 de 0.6, 0.5, 0.4 et 0.31 μm . Ce qui nous permet de déterminer pour une altitude de la membrane de 0.5 μm l'optimum de $\frac{dC}{dh_3} \simeq -1.36 nF/m$ avec $a = 1.55 \mu m$. Nous pouvons comparer ces valeurs avec celles obtenues pour le cas d'une membrane fine seule dans le vide avec les électrodes, où nous avons trouvé un optimum $\frac{dC}{dh_3} \simeq -0.55 nF/m$ en $a \simeq 1.75 \mu m$. Cette valeur est environ trois fois plus petite.

5.2 Fabrication de peignes d'électrodes sous la membrane

Nous allons, dans cette partie, détailler les différentes étapes permettant l'élaboration des membranes à cristaux photoniques suspendues par quatre ponts au dessus du réseau d'électrodes interdigitées, voir Figure 5.16.

La réalisation de la structure se fait en deux parties. Un wafer de SiN qui sert d'échantillon hôte pour la structure finale sur lequel le dépôt métallique sera fait et un wafer de InP, servant à la croissance de la membrane.

Réalisation des électrodes

Partant du wafer de Silicium 1 μm de SiO₂ sont déposés par MOCVD. Une résine positive (PMMA) est d'ailleurs déposée par spin-coating, qui est insolée par lithographie électronique permettant de faire le dessin des électrodes. Une couche d'accroche de 20 nm de Ti est ensuite déposée, permettant la fixation du dépôt d'or de 100 nm d'épaisseur. Le lift-off de la PPMA est ensuite fait avec du trichloroéthylène dans bac à ultra-sons, ce qui laisse uniquement les électrodes sur le substrat. Pour finir, vient l'étape d'encapsulation, où 100 nm de SiO₂ sont déposés par dessus les électrodes. Cette étape s'est avérée nécessaire pour éviter tout court-circuit des capacités du aux divers contaminant (poussière, résidus carbonés...).

Préparation des membranes

Partant du wafer d'InP de 330 μm d'épaisseur, 1 μm d' InGaAs puis 267 nm d'InP sont déposés par épitaxie (MOCVD/MBE). Cette dernière couche d'InP servira à la réalisation des membranes. Puis 200 nm de SiO₂ sont ensuite déposés par MOCVD, ceux-ci serviront de couche sacrificielle pour la libération de la membrane suspendue. Ensuite, une colle BCB servant pour le report de substrat est déposée. Pour obtenir une épaisseur d'environ 200 nm, le BCB est dilué dans une solution de métylène (2 :1.5) puis spin-coaté sur l'échantillon.

Réalisation des membranes à cristal photonique

Les deux échantillons sont donc collés grâce au BCB, par une cuisson de 15 minutes à 80°C. Le substrat d'InP est ensuite retiré par dissolution dans une solution de HCl pendant une heure, puis la couche d'InGaAs est ensuite retirée par une solution de H₂SO₄/H₂O₂/H₂O (3 :1 :1) pendant environ une minute. Vient ensuite les étapes de réalisation et de gravure des cristaux photoniques et des structures mécaniques explicitées dans le chapitre 2. La dernière étape est la libération des membranes en gravant le SiO₂ par une solution d'acide Fluorique/H₂O de concentration 1 :10 pendant dix minutes, la colle BCB servant de couche d'arrêt pour la gravure.

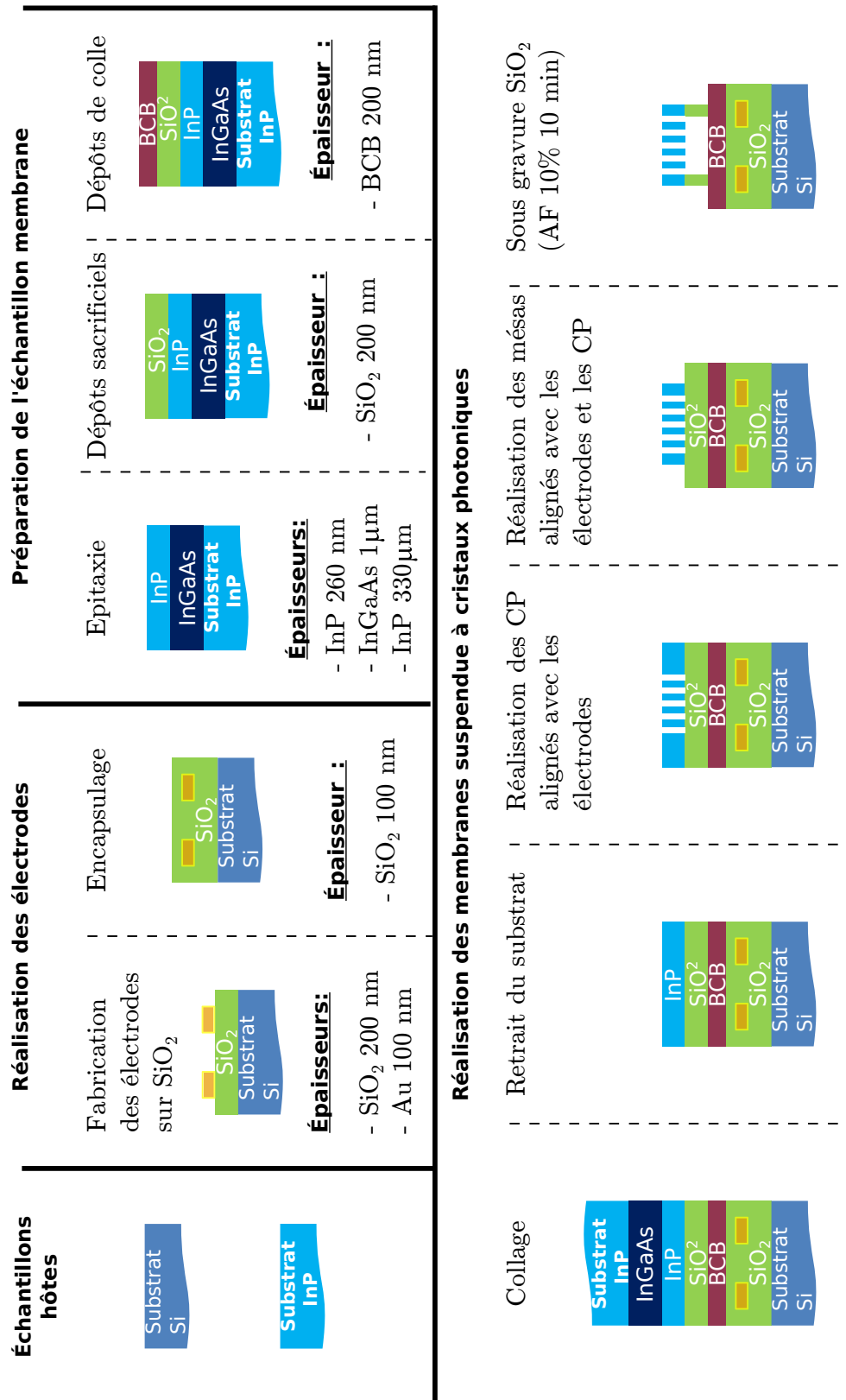


Fig. 5.16 Schématisation des différentes étapes pour la réalisation du dispositif pour le contrôle électrostatique.

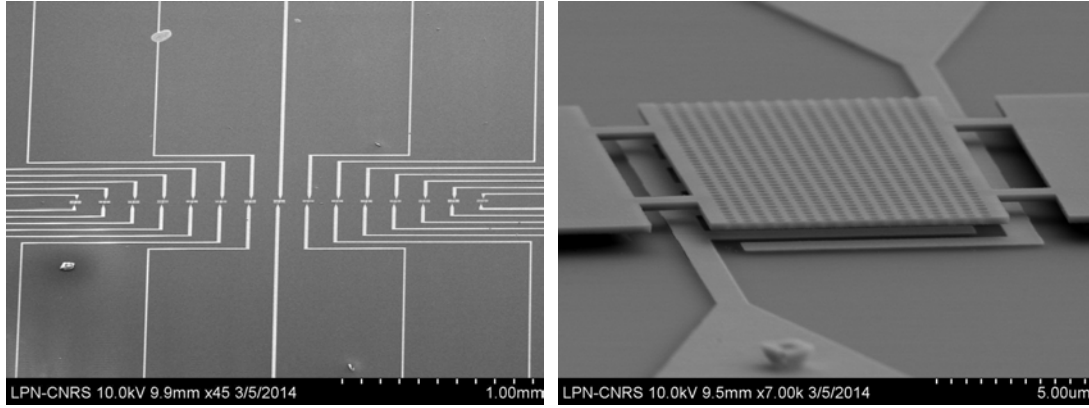


Fig. 5.17 Vues au microscope électronique des échantillons avec électrodes et membranes suspendues à cristal photonique.

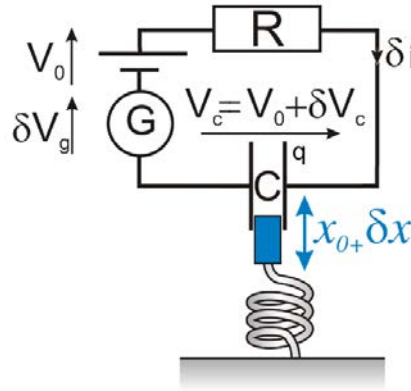


Fig. 5.18 Schéma du système membrane et circuit électrique.

5.3 Intégration du dispositif pour l'optomécanique

Considérons le système formé d'un résonateur mécanique dont le déplacement module la capacité d'un condensateur. Celui-ci est inséré dans le circuit Figure 5.18, constitué d'un générateur de tension continue V_0 , d'un générateur de tension alternative δV_g et d'une résistance R .

5.3.1 Vue d'ensemble du système

Pour la suite, toutes les quantités seront séparées en leur valeur moyenne, indexée par 0, et leur partie fluctuante, préfixée par δ . Nous avons ainsi le potentiel aux bornes de la capacité qui s'écrira :

$$V_c = V_0 + \delta V_c,$$

sa charge :

$$q = q_0 + \delta q,$$

sa capacité

$$C = C_0 + \delta C.$$

L'intensité du courant circulant dans le sens horaire dans le circuit est notée :

$$\delta i = \frac{dq}{dt} = \frac{d\delta q}{dt}$$

Effet de la membrane sur le circuit électrique

Les mouvements de la membrane vont modifier la capacité du condensateur dont nous allons chercher à calculer les répercussions sur la tension V_c . La charge q du condensateur est donnée par :

$$q = CV = (C_0 + \delta C)(V_0 + \delta V_c). \quad (5.3.1)$$

Donc au premier ordre pour de petites fluctuations :

$$\delta q = C_0 \delta V_c + V_0 \delta C. \quad (5.3.2)$$

L'intensité est donc :

$$i = C_0 \delta \dot{V}_c + V_0 \delta \dot{C} = C_0 \delta \dot{V}_c + V_0 \frac{\delta C}{dx} \dot{x}. \quad (5.3.3)$$

En écrivant la loi d'Ohm pour la résistance R , nous arrivons à :

$$V_{dc} - V_0 + \delta V_g - \delta V_c = Ri = RC_0 \delta \dot{V}_c + RV_0 \frac{\delta C}{dx} \dot{x}.$$

Finalement, puisque les équations ont été linéarisées au premier ordre selon toutes les petites fluctuations, nous pouvons passer dans l'espace de Fourier complexe et noter ainsi toute quantité fluctuante δO comme :

$$\delta O = \delta \bar{O} e^{-j\omega t}$$

De plus, par souci de concision pour la suite nous omettrons la barre, notant simplement δO à la place de $\delta \bar{O}$. Après simplification, nous obtenons :

$$\delta V_c = \frac{\delta V_g}{1 - j\omega RC_0} + \delta x \frac{j\omega RV_0 \frac{dC}{dx}}{1 - j\omega RC_0} \quad (5.3.4)$$

Les variations de la tension aux bornes du condensateur sont la somme de deux termes : le premier, en δV_g , retranscrit directement les fluctuations du générateur filtrées par un filtre passe bas RC_0 , le second en $\frac{dC}{dx} \delta x$ correspond à l'effet des mouvements de la membrane. Maintenant changeons de point de vue et allons voir l'influence du champ électrique généré par le condensateur sur le mouvement du résonateur.

Mouvement de la membrane dans un champ électrique

La force exercée par une armature d'un condensateur sur la seconde, ou plus généralement exercée sur un élément mobile qui modifie la capacité du condensateur peut se calculer grâce à la variation d'énergie électrostatique stockée. Plaçons nous dans le cas où le condensateur porte une charge Q et est complètement isolé (circuit ouvert). Dans cette configuration nous sommes assuré que la variation d'énergie électrostatique

est due uniquement au travail de la force électrostatique. La charge est constante et l'énergie vaut $E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$. La force est donc :

$$F(x) = -\frac{d}{dx}E(x) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{dC}{dx} = \frac{1}{2} \frac{dC}{dx} V^2 \quad (5.3.5)$$

Dans le cas du condensateur plan, si x désigne la distance entre les deux armatures et S sa surface, C vaut $\epsilon_0 \frac{S}{x}$ et on retrouve bien une force attractive. De manière générale cette force tend à augmenter la capacité. Pour la géométrie qui nous intéresse, la membrane diélectrique sera toujours attirée par le peigne d'électrodes.

En considérant le schéma de la Figure 5.18, la présence de la tension V_0 va engendrer une force constante sur la membrane à laquelle se superpose une partie variable provoquée par les déplacements de la membrane ainsi que la modulation δV_g . Nous allons donc séparer le problème en ne regardant dans un premier temps que les effets de la partie statique de la force et dans un second temps la partie dynamique lorsque l'on se place au voisinage d'une résonance de la membrane.

-Partie statique :

Pour une tension V_0 , la partie statique de la force est :

$$F(x_0) = \frac{1}{2} \frac{dC}{dx} \Big|_{x=x_0} V_0^2 \quad (5.3.6)$$

Nous allons calculer le déplacement statique provoqué par la force électrostatique. Il faut d'une part s'assurer qu'il restera petit devant la distance séparant la membrane des électrodes afin de ne pas provoquer un collapse de la membrane et donc détruire l'échantillon. D'autre part il faut évaluer les modifications de la capacité et de ses dérivées dues à ce déplacement. Enfin, il est responsable de contraintes supplémentaires dans l'échantillon qui peuvent modifier les caractéristiques dynamiques des modes, en particulier leur fréquence de résonance.

La géométrie considérée est celle de la Figure 5.19, la membrane rectangulaire est sus-

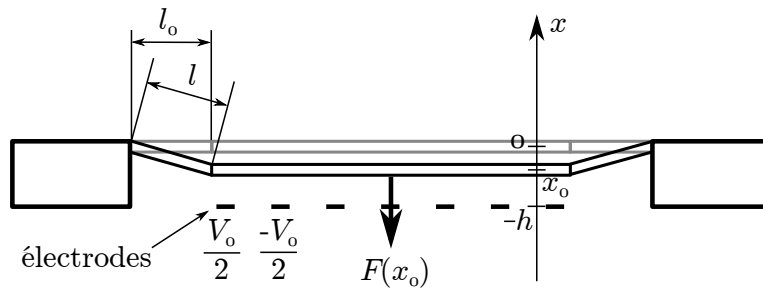


Fig. 5.19 Déplacement statique de la membrane dû au bias.

pendue par quatre ponts de longueur l_0 et de largeur w à une distance h des électrodes. Nous avons cherché la position d'équilibre en fonction du biais en considérant la réactions des quatre ponts soutenant la membrane et subissant les contraintes associées

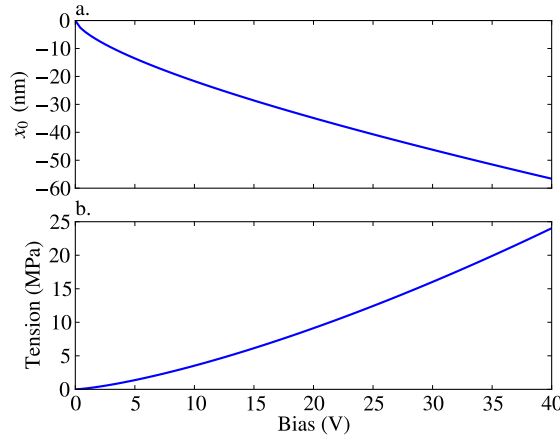


Fig. 5.20 Déplacement statique de la membrane dû au biais.

aux déformations. Nous avons considéré pour cette approche que la quasi totalité de la déformation se produit au niveau des ponts, ayant une section faible devant celle de la membrane, et que ces déformations restaient décrites par la loi de Hook linéaire. Ce qui nous donne après avoir développé le terme de tension de rappel dû à la déformation des ponts :

$$4ES \sin \left(\arctan \left(\frac{-x_0}{l_0} \right) \right) \left(\frac{1}{\cos(\arctan(\frac{-x_0}{l_0}))} - 1 \right) + \frac{1}{2} \frac{dC}{dx}(x_0) V_0^2 = 0, \quad (5.3.7)$$

qui dans le cas de faible amplitude de déplacement statique est approximée à :

$$x_0 = l_0 \left(\frac{C'(x_0) V_0^2}{4ES} \right)^{1/3} \quad (5.3.8)$$

Avec E le module d'Young et S la section d'un pont ($0.26 \times 1 \mu m^2$). Les solutions de cette équation sont tracées Figure 5.20, où les valeurs de biais sont comprises entre 0 et 40 Volts. On peut voir que le déplacement statique reste petit devant l'altitude de la membrane et ne devrait donc pas trop influencer. Comme explicité dans le modèle ce déplacement statique va venir créer une contrainte dans le résonateur qui pourra être vu comme un terme de tension. La Figure 5.20 représente les valeurs de contrainte associées au déplacement statique x_0 pour des valeurs de biais comprises entre 0 et 40 Volt. Pour des biais inférieurs à 20 V la tension induite ne dépasse pas 10 MPa, ce qui donne une variation relative de fréquence de 0.1% (voir chapitre 3.2).

- Partie dynamique :

On va montrer ici que la partie dynamique de la force est responsable de modifications sur les fréquences de résonance et les facteurs de qualité des modes acoustiques de la membrane. Les variations de la force électrostatique sont dues aux variations de position δx de la membrane et aux fluctuations de tension aux bornes des électrodes.

Elles sont données par :

$$\delta F = \left. \frac{\delta F}{\delta x} \right|_V \delta x + \left. \frac{\delta F}{\delta V} \right|_x \delta V \quad (5.3.9)$$

$$= \left. \frac{1}{2} \frac{d^2 C}{dx^2} \right|_{x=x_0} V^2 \delta x + \left. \frac{dC}{dx} \right|_{x=x_0} V \delta V \quad (5.3.10)$$

$$(5.3.11)$$

Au voisinage de la fréquence de résonance d'un mode, le comportement de la membrane est essentiellement celui d'un oscillateur harmonique. On obtient alors l'équation d'évolution suivante :

$$m\delta\ddot{x} + m\omega_m^2\delta x + m\Gamma_m\delta\dot{x} = \frac{1}{2}V_0^2\frac{d^2C}{dx^2}(x_0)\delta x + V_0\frac{dC}{dx}(x_0)\delta V_c. \quad (5.3.12)$$

En utilisant la notation complexe et en utilisant l'équation 5.3.4 nous arrivons à :

$$m \left[(\omega_m^2 - \omega^2) - j\Gamma\omega \right] \delta x = \frac{1}{2} \frac{d^2 C}{dx^2}(x_0) V_0^2 \delta x + \frac{dC}{dx}(x_0) \left(\frac{V_0 \delta V_g}{1 - j\omega RC_0} + \frac{j\omega R V_0^2 \frac{dC}{dx}}{1 - j\omega RC_0} \delta x \right), \quad (5.3.13)$$

en supposant que $\omega \approx \omega_m$:

$$\begin{aligned} (\omega_m^2 - \omega^2) &\approx 2\omega_m(\omega_m - \omega) \\ j\Gamma\omega &\approx j\Gamma\omega_m. \end{aligned}$$

Ce qui nous conduit à l'équation suivante :

$$\delta x = \chi[\omega] \delta F \quad (5.3.14)$$

où $\chi[\omega]$ la susceptibilité mécanique d'un oscillateur harmonique amorti est :

$$\chi[\omega] = \frac{1}{m(2\omega_m(\omega_m - \omega) - j\Gamma\omega_m)} \quad (5.3.15)$$

Susceptibilité effective

Utilisant l'équation 5.3.4 nous voyons que le terme de droite de l'équation 5.3.13 est la somme de deux contributions : l'une dépendant de δV_g , et l'autre dépendant du déplacement δx . Il est possible de regrouper ce dernier dans le terme de gauche, ce qui nous permet de définir une susceptibilité effective :

$$\delta x = \chi_{eff}[\omega] \frac{dC}{dx} V_0 \frac{\delta V_g}{1 - RC_0 j\omega}, \quad (5.3.16)$$

avec

$$\chi_{eff} = \frac{1}{m(2\omega'_m(\omega'_m - \omega) + j\Gamma'\omega'_m)} \quad (5.3.17)$$

où

$$\omega'_m = \omega_m + \frac{\left(\frac{dC}{dx} \right)^2 V_0^2 R \omega_m \operatorname{Re}[z] - \frac{1}{2} \frac{d^2 C}{dx^2} V_0^2}{2m\omega_m} \quad (5.3.18)$$

et où

$$\Gamma' = \Gamma + \frac{1}{m} \left(\frac{dC}{dx} \right)^2 V_0^2 \operatorname{Re} m[z] \quad (5.3.19)$$

avec

$$z = \frac{j}{1 - jRC_0\omega_m} \quad (5.3.20)$$

Bien sûr ces formules ne sont correctes que pour $\omega_m - \omega'_m \ll \omega$.

D'après l'équation 5.3.18, nous voyons un décalage de la pulsation ω_{es} dû au couplage capacitif ainsi qu'un terme de dissipation Γ_{es} (eq 5.3.19), soit :

$$\Gamma_{es} = \frac{1}{m\omega_m} \left(\frac{dC}{dx} \right)^2 R V_0^2 \frac{1}{1 + (RC_0\omega_m)^2} \quad (5.3.21)$$

$$\omega_{es} = \frac{1}{2m\omega_m} \left[\frac{1}{C_0} \left(\frac{dC}{dx} \right)^2 \frac{(RC_0\omega_m)^2}{1 + (RC_0\omega_m)^2} - \frac{1}{2} \frac{d^2C}{dx^2} \right] V_0^2. \quad (5.3.22)$$

On constate que les effets sur la fréquence et l'amortissement du mode sont en V_0^2 ce que l'on attend puisque la force électrostatique est quadratique en V_0 . Le terme de dissipation est toujours positif, et correspond à un amortissement supplémentaire. En fait, il est facile de montrer qu'il correspond à la dissipation d'énergie dans la résistance. En effet, la puissance Joule moyenne dissipée dans la résistance est $P_J = \frac{1}{2} \frac{|\delta V_c|^2}{R}$ puisque la tension aux bornes de la résistance vaut δV_c . Or, lorsque δV_c est uniquement provoqué par les mouvements δx de la membrane ($\delta V_g = 0$), cette puissance devient (eq. 5.3.4) :

$$P_J = \frac{1}{2} \frac{1}{R} |\delta x|^2 \frac{\omega_0^2 R^2 V_0^2}{1 + RC_0\omega_0} \left(\frac{dC}{dx} \right)^2 \quad (5.3.23)$$

On retrouve bien que $P_J = \frac{1}{2} \omega_0^2 \Gamma_{es} |\delta x|^2$. Le terme de friction électrostatique n'entraîne cependant pas de diminution de la température du mode comme cela est le cas pour des processus de friction froide [100]. En effet l'augmentation du taux d'amortissement provient de la dissipation de l'énergie dans la résistance qui est à température ambiante et induit donc des fluctuations supplémentaires sur la position de la membrane. Ce bruit provient directement du bruit Nyquist de la résistance, qui peut se modéliser par un générateur de tension v en série avec la résistance, dont le spectre est :

$$S_{vv} = 4k_B T R. \quad (5.3.24)$$

Les fluctuations provoquent un bruit δV_c aux bornes du condensateur dont le spectre est (cf eq. 5.3.4) :

$$S_{\delta V_c} = 4k_B T R \frac{1}{1 + (\omega R C_0)^2} \quad (5.3.25)$$

Le spectre de la force électrostatique résultant est donc (eq. 5.3.25) :

$$S_{F_{es}} = \left(\frac{dC}{dx} \right)^2 V_0^2 S_{\delta V_c} \quad (5.3.26)$$

$$= \left(\frac{dC}{dx} \right)^2 V_0^2 S_{\delta V_c} \frac{R}{1 + (\omega R C_0)^2} \quad (5.3.27)$$

$$= 4m\Gamma_{es} k_B T \quad (5.3.28)$$

On retrouve bien exactement le terme de fluctuations associé à un processus de dissipation lié à un bain de température T . La température du mode reste bien à la température T .

Enfin, équation 5.3.18, pour des fonctions $C(x)$ tendant vers 0 quand x tend vers l'infini, de façon polynomial (cas du condensateur plan) ou exponentiellement (diélectrique sur électrodes interdigitées) la dérivée seconde $\frac{d^2C}{dx^2}$ est positive et on s'attend à un ω_{es} négatif.

Prédiction du modèle

La résistance R est attribuée à la résistivité des pistes en or reliant les électrodes aux pads permettant de faire les micro-soudures de connexion. Leur épaisseur est de 200 nm, leur largeur de $20 \mu\text{m}$ et leur longueur d'environ 5 mm, nous calculons alors une résistance $R = \rho L/S = 55 \Omega$ où ρ est la résistivité de l'or et vaut $2.2 \times 10^{-8} \Omega\cdot\text{m}$. Nous représentons Figure 5.21, les variations relatives de fréquence de résonance et d'amortissement du résonateur mécanique pour des valeurs de biais croissantes (resp. a et b), ainsi que le rapport des décalages fréquentiels et d'amortissement pour différentes altitudes de membrane (c), ainsi que le déplacement statique associé aux différents biais (d). Nous pouvons tout de suite constater que dans ce modèle le rapport de ces deux décalages est indépendant du biais :

$$\frac{\Delta\Gamma_{es}}{\Delta\omega_{es}} = -4 \left(\frac{dC}{dc} \right)^2 \frac{R\omega_m}{1 + (RC_0\omega_m)^2} \frac{1}{\frac{d^2C}{dx^2}} \simeq -4 \frac{\left(\frac{dC}{dx} \right)^2}{\frac{d^2C}{dx^2}} \omega_m R, \quad (5.3.29)$$

où l'on a fait l'approximation $RC_0\omega_0 \ll 1$.

5.3.2 Montage Expérimental

schéma

Le montage optique est le même que celui servant à la caractérisation mécanique des membranes détaillé dans le chapitre 3, seule la chaîne d'excitation est modifiée. Le signal d'excitation est la somme d'une modulation de pulsation ω générée par la sortie d'un analyseur de réseau et d'un offset généré par un générateur de tension pouvant délivrer une tension comprise entre -20 et 20 V. Un programme écrit en python permet d'incrémenter l'offset délivré par le générateur et de récupérer le signal enregistré par l'analyseur de réseau.

5.3.3 Mesures des constantes de couplage

Dans cette section sont présentés les résultats de couplage capacitif que nous confronterons aux prédictions du modèle développé précédemment. Ces mesures ont été réalisées pour un peigne d'électrode de dimension $a = 2 \mu\text{m}$ et $w = 1 \mu\text{m}$, correspondant à un couplage entre la position de la membrane et la capacité du peigne d'électrode de $1.27 \times 10^{-9} \text{ F/m}$. La membrane est une membrane à ponts de dimension $30 \times 30 \times 0.26 \mu\text{m}^3$, avec des ponts de $2 \mu\text{m}$ de long. La figure 5.23 présente une cartographie de l'amplitude de la réponse mécanique du mode (0,0) de la membrane, sur une fenêtre de 400 kHz de large, en fonction du biais V_0 appliqué aux bornes des

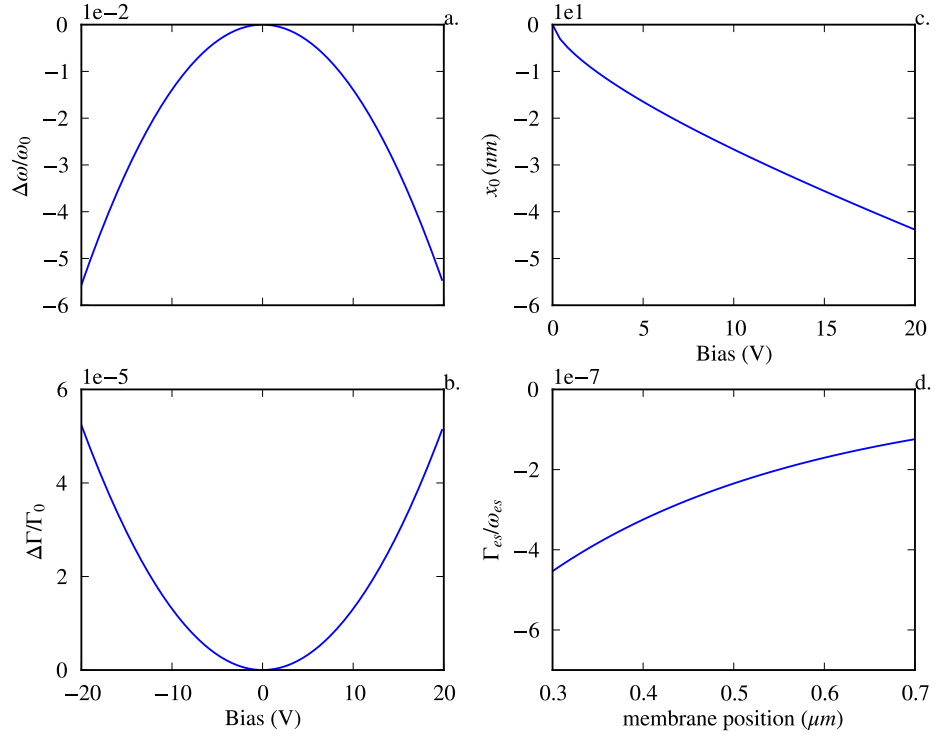


Fig. 5.21 Estimation de la variation relative de fréquence et d'amortissement (a. et b.) prédit par le modèle, du déplacement statique (c.) en fonction du biais appliqué aux électrodes. Ainsi que du rapport entre les variations d'amortissement et les variations en fréquence (d.) en fonction de l'altitude de la membrane. Ces valeurs ont été estimées pour une masse typique de la membrane de 2.10^{-13} kg.

électrodes pour des tensions allant de -20 à 20 V. Conformément au modèle, nous observons une diminution quadratique de la fréquence de résonance du mode mécanique en fonction du biais appliqué. On peut aussi observer une légère dissymétrie de la variation en fréquence entre les biais négatifs et ceux positifs.

De ces mesures sont extraites les variations de la fréquence de résonance mécanique et de l'amortissement en fonction de biais. Ces données sont présentées sur la figure 5.24, où l'on retrouve également superposées les prédictions du modèle théorique (courbes vertes) données par les formules 5.3.18 et 5.3.19. Pour le modèle, nous avons considéré comme seul paramètre libre la masse effective du mode, ce qui a permis d'effectuer un ajustement quadratique de la variation de la fréquence de résonance. La masse effective déduite est de $M_{fit} = 6.36 \times 10^{-14}$ kg. Nous pouvons comparer cette valeur à celle calculée par une simulation par éléments finis et qui vaut 3.26×10^{-14} kg, elles sont donc en relativement bon accord. Cependant, nous pouvons voir sur la figure 5.24b que le modèle ne suffit pas à décrire complètement la variation d'amortissement de la membrane, celle-ci est supérieure de plusieurs ordres de grandeur par rapport à la valeur prédite. Par ailleurs, cet effet est systématique, en effet, en regardant la réponse du mode 3 de cette même membrane, nous trouvons une variation de son taux d'amortissement également bien supérieure à celle attendue.



tion par couplage capacitif.



d'électrodes $s = 1 \mu m$ et $a = 2 \mu m$

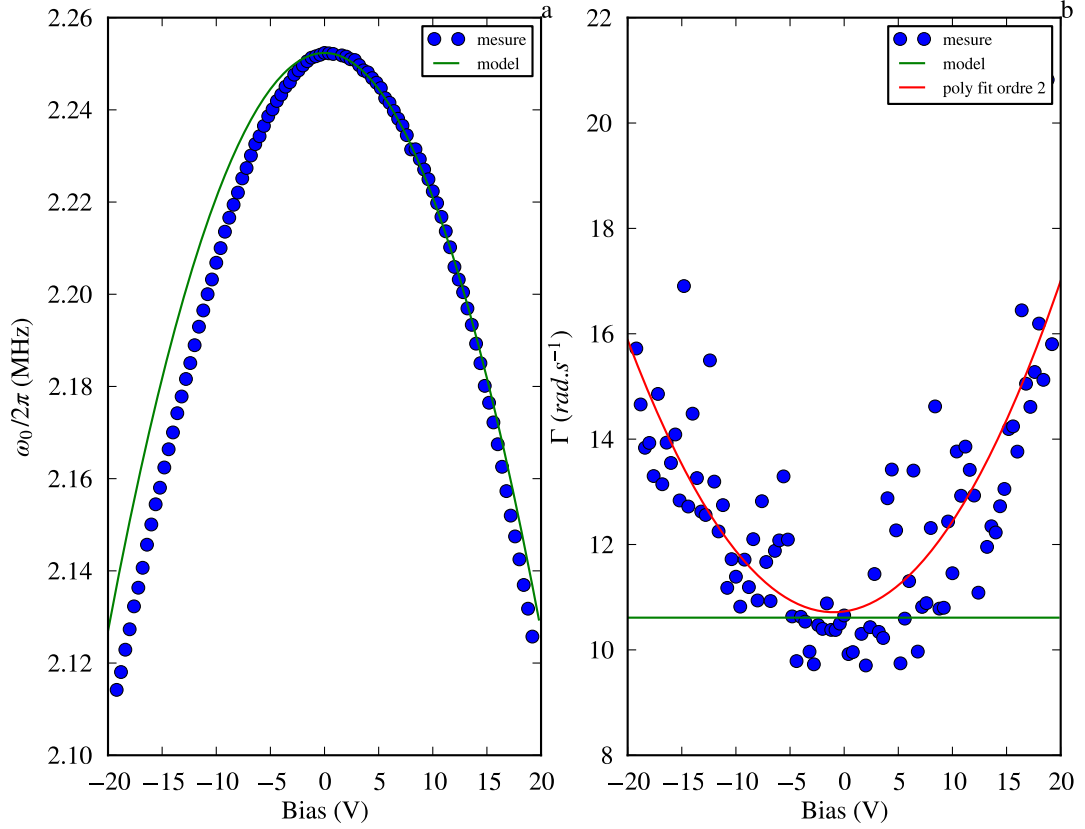


Fig. 5.24 Comparaison entre prédictions du modèle et mesures expérimentales

Nous avons exploré deux voies pour essayer de comprendre cet écart à la théorie. La première a été de prendre en compte les éventuelles capacités parasites du montage pouvant changer la valeur du nombre z défini par l'équation 5.3.20. Elles peuvent provenir de la capacité entre deux pistes adjacentes sur l'échantillon ou encore de celle formée entre une piste et le plan de masse. Ces deux capacités peuvent être considérées comme une capacité effective en dérivation par rapport au condensateur formé par les électrodes et la membranes. La capacité entre deux pistes adjacentes vaut :

$$C_{piste} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\log(\pi^2 s^2/(l+e))} L, \quad (5.3.30)$$

avec ϵ la permittivité du milieu, s la distance séparant deux pistes, l , e et L respectivement la largeur, l'épaisseur et la longueur des pistes. Dans notre cas $s = 40 \times 10^{-6}$ m, $e = 0.26 \times 10^{-6}$ m, $L = 5 \times 10^{-3}$ m et $\epsilon_r = 3.9$ ce qui donne $C_{piste} = 1.47 \times 10^{-13}$ F. La capacité entre le plan de masse et la piste est donnée par :

$$C_{plan} = \epsilon_0\epsilon_r \left(\frac{l}{d} + \frac{2}{\pi} \left(1 + \log \left(1 + \frac{\pi l}{2d} \right) \right) \right) L, \quad (5.3.31)$$

avec d la distance séparant le plan de masse de la piste, qui dans notre cas est égale à l'épaisseur du substrat de silicium, soit environ $300\text{ }\mu\text{m}$. La permittivité relative ε_r vaut 11.6, ce qui donne une capacité $C_{plan} = 2.4 \times 10^{-13}\text{ F}$. Ces deux effets donnent des capacités additionnelles de l'ordre de 10^{-13} F qui s'additionneront à la capacité formée des électrode et de la membrane. Cependant cette valeur est trop faible pour expliquer un quelconque effet sur l'amortissement, en effet le produit $RC\omega$ restera très faible devant 1.

La deuxième piste serait une résistance non prise en compte dans notre modèle. Pour la déterminer nous avons procédé à un ajustement polynomial d'ordre deux de la variation du taux d'amortissement celui-ci permet d'extraire la résistance que devrait présenter le circuit et qui vaut $530\text{ k}\Omega$ (voir figure 5.24b courbe rouge). Pour une telle valeur le nombre z défini par l'équation 5.3.20 reste environ égal à j ce qui ne modifierait pas la courbe de fréquence. Cette résistance additionnelle pourrait provenir d'un défaut sur la gravure des pistes mais n'a pas été décelée par une inspection au microscope optique.

5.4 Conclusion

Nous avons présenté dans cette partie le développement d'électrodes sur puce qui permettent d'agir par couplage capacitif sur la membrane. Les premiers résultats sont très prometteurs. Les forces électrostatiques mesurées sont en très bon accord avec les modèles analytiques et les simulations par éléments finis. Nous avons également observé des effets de ressort électrostatique ainsi que des effets thermodynamiques de couplage entre la membrane et le bruit Nyquist d'une résistance même si ce dernier point nécessite encore d'être confirmé, par exemple en plaçant une résistance additionnelle dans le circuit dont on pourrait faire varier la valeur et la température.

Ce type de système opto-électro-mécanique miniature est dans la veine de l'opto-mécanique intégré. Ils font l'objet d'intenses développements, en particulier, dans notre groupe qui envisage d'inclure la capacité formée par les électrodes dans un circuit micro-onde ouvrant la possibilité de réaliser un système hybride optique/micro-onde.

Conclusion

Nous avons présenté dans ce mémoire le développement d'un nano-résonateur pour la réalisation d'expériences d'optomécanique. Les caractéristiques nécessaires à la réalisation de telles expériences comme l'observation des fluctuations de point zéro, ou encore le couplage du résonateur à d'autres systèmes quantiques ont déterminé le plan de route pour sa conception. Ces critères sont : une haute réflectivité permettant un fort couplage avec le champ lumineux incident, une faible masse offrant une susceptibilité mécanique importante, une fréquence de résonance de l'ordre du MHz rendant la température quantique accessible par des techniques de refroidissement actif, ainsi qu'un facteur de qualité mécanique le plus élevé possible, limitant le couplage à l'environnement et permettant la mise en place de techniques de refroidissement actif.

Le premier chapitre a été consacré au rappel du principe de mesure interférométriques du déplacement d'un miroir dans une cavité Fabry-Pérot. Ainsi qu'à la description des caractéristiques mécaniques d'un résonateur, de son couplage avec l'environnement et de sa réponse aux forces de Langevin.

Le deuxième chapitre a été consacré au développement d'une structure à cristal photonique offrant une haute réflectivité, augmentant ainsi le couplage entre le champ lumineux et le mouvement du résonateur. Pour cela, nous avons choisi de développer un cristal photonique membranaire en Phosphore d'Indium. Après avoir mené une étude sur la physique des réflecteurs à cristal photonique en incidence normale, nous avons déterminé grâce à la méthode de simulation RCWA, les paramètres géométriques combinant une réflectivité théorique la plus grande possible sur une large gamme de longueur d'onde, ainsi qu'une faible épaisseur, donc une faible masse. Nous avons ensuite discuté des différents effets introduits par la taille finie du système, comme les dimensions latérales du cristal ou encore l'influence du waist optique. Après la fabrication de ces structures par le Laboratoire de Photonique et de NanoStructures, nous avons pu procéder à leur caractérisation optique. Pour cela nous avons dans un premier temps effectué des mesures de réponse spectrale et vérifié leur concordance avec les simulations. Puis dans un deuxième temps nous avons formé des cavités Fabry-Pérot utilisant la membrane comme miroir de fond. Nous avons mesuré des finesses allant jusqu'à 2500, qui correspondent à des réflectivités de plus de 99.78%. De plus, les structures développées possèdent un plateau de réflectivité de plus de 99.5% sur une largeur spectrale de 20 nm centrée autour de 1064 nm, qui est la longueur d'onde de travail.

Nous avons, dans le troisième chapitre, présenté une étude des propriétés mécaniques de ces nano-membranes à cristal photonique. Après avoir détaillé les différents mécanismes de perte dont souffrent les micro- et nano-résonateurs, nous avons cherché à mettre en évidence expérimentalement l'influence des pertes par ancrage, mécanisme pressenti pour être la première limitation à l'obtention d'un facteur de qualité élevé. À partir d'une géométrie de membrane rectangulaire suspendue par quatre ponts, nous avons cherché à l'aide de simulations par éléments finis, les configurations géométriques minimisant ces pertes. Nous avons ensuite cherché à mettre en évidence expérimentalement la variation du facteur de qualité associé aux pertes par ancrages. Les comportements des modes propres des différents résonateurs fabriqués étaient proches de ceux prédits par les simulations numériques, toutefois, nous n'avons pas pu observer la dépendance attendue du facteur de qualité en fonction de la géométrie des résonateurs. Ce dernier point pourrait indiquer qu'une autre source de dissipation limite en fait les facteurs de qualité mécaniques. Nous avons ensuite étudié la variation de la dissipation mécanique en fonction de la température. Celle-ci s'est trouvée diminuée à mesure que la température du résonateur était abaissée, augmentant ainsi le facteur de qualité de certains modes de presque un ordre de grandeur.

Afin de comprendre l'effet des contraintes dans le résonateur mécanique, nous avons introduit la méthode de Rayleigh dans le cas simple d'une poutre suspendue. Cette approche théorique du problème a permis de mettre en évidence deux phénomènes importants : tout d'abord, l'introduction de contraintes de tension dans la membrane vibrante devrait permettre d'augmenter les fréquences de vibration sans ajouter de dissipation, et ainsi d'obtenir de meilleurs facteurs de qualité. D'autre part, on s'attend à voir apparaître des effets non-linéaires sur la fréquence de résonance lorsque l'amplitude de déplacement devient non-négligeable devant l'épaisseur de la membrane. Dans un dernier point nous avons donc mené une étude approfondie sur la dynamique en régime non-linéaire des membranes à cristal photonique. Ce régime se caractérise par une modification de la fréquence de résonance proportionnelle à l'intensité des vibrations. Cet effet donne donc lieu par une modification de la fréquence de résonance proportionnelle à l'intensité des vibrations. Nous avons aussi exploré l'influence de la non linéarité d'un mode sur la fréquence d'un deuxième mode fortement couplé au premier par les déformations des ponts. Enfin, nous avons effectué des expériences de type pompe sonde donnant lieu à la création de conjugué de phase.

Dans le quatrième chapitre, nous avons présenté le montage expérimental permettant l'observation du bruit thermique des nano-membranes. Nous avons présenté les différents éléments nécessaires à la création d'une cavité Fabry-Perot ultra courte de faible waist, ainsi que le banc de détection. Nous avons observé le bruit thermique des nano membranes à cristal photonique et caractérisé les propriétés des différents modes mécaniques en les confrontant aux simulations numériques. Dans un second temps nous avons présenté les résultats sur le contrôle du bruit thermique par rétroaction active, ou cold damping. Nous avons pour cela développé une boucle de contre réaction qui nous a permis de refroidir le bruit thermique d'un facteur 3. Nous avons également observé des effets de refroidissement lorsque la cavité est désaccordée par rapport au champ lumineux incident. Nous attribuons ce "self cooling" d'un mode du résonateur à l'effet photothermique.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous avons présenté le développement et l'opti-

misation du couplage capacitif entre un peigne d'électrodes interdigitées et la nanomembrane. Ce dispositif constitue le point de départ vers des systèmes optoélectromécaniques.

Bibliographie

- [1] V. B. Braginsky, *Measurement of weak forces in Physics Experiments* (University of Chicago Press, 1977).
- [2] B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer, et B. Roulet, *Eléments de physique statistique*, Enseignement des sciences (Hermann, Paris, 1989). URL <http://cds.cern.ch/record/114149>.
- [3] O. Arcizet, P.-F. Cohadon, T. Briant, M. Pinard, et A. Heidmann, “Radiation-pressure cooling and optomechanical instability of a micromirror.” *Nature* **444**, 71–74 (2006). URL <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/17080085>.
- [4] J.-M. Courty, A. Heidmann, et M. Pinard, “Quantum limits of cold damping with optomechanical coupling,” (2001).
- [5] J. D. Teufel, T. Donner, D. Li, J. W. Harlow, M. S. Allman, K. Cicak, A. J. Sirois, J. D. Whittaker, K. W. Lehnert, et R. W. Simmonds, “Sideband cooling of micromechanical motion to the quantum ground state.” *Nature* **475**, 359–363 (2011). URL <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/21734657>.
- [6] A. D. O’Connell, M. Hofheinz, M. Ansmann, R. C. Bialczak, M. Lenander, E. Lucero, M. Neeley, D. Sank, H. Wang, M. Weides, J. Wenner, J. M. Martinis, et A. N. Cleland, “Quantum ground state and single-phonon control of a mechanical resonator.” *Nature* **464**, 697–703 (2010). URL <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/20237473>.
- [7] J. Chan, T. P. M. Alegre, A. H. Safavi-Naeini, J. T. Hill, A. Krause, S. Gröblacher, M. Aspelmeyer, et O. Painter, “Laser cooling of a nanomechanical oscillator into its quantum ground state.” *Nature* **478**, 89–92 (2011). URL <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/21979049>.
- [8] R. Rivière, S. Deléglise, S. Weis, E. Gavartin, O. Arcizet, A. Schliesser, et T. J. Kippenberg, “Optomechanical sideband cooling of a micromechanical oscillator close to the quantum ground state,” *Physical Review A* **83**, 1–9 (2011). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.83.063835>.
- [9] P. Rabl, S. J. Kolkowitz, F. H. L. Koppens, J. G. E. Harris, P. Zoller, et M. D. Lukin, “A quantum spin transducer based on nanoelectromechanical resonator arrays,” *Nat Phys* **6**, 602–608 (2010). URL <http://dx.doi.org/10.1038/nphys1679><http://www.nature.com/nphys/journal/v6/n8/abs/nphys1679.html#supplementary-information>.

- [10] B. Rogers, M. Paternostro, G. M. Palma, et G. De Chiara, “Entanglement control in hybrid optomechanical systems,” *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics* **86**, 1–6 (2012).
- [11] H. J. Kimble, “The quantum internet,” *Nature* **453**, 1023–1030 (2008). URL <http://dx.doi.org/10.1038/nature07127>.
- [12] S. Chu, “Cold atoms and quantum control,” *Nature* **416**, 206–10 (2002). URL <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/11894103>.
- [13] M. Wallquist, K. Hammerer, P. Rabl, M. Lukin, et P. Zoller, “Hybrid quantum devices and quantum engineering,” **014001** (2009). URL <http://arxiv.org/abs/0911.3835>.
- [14] B. Julsgaard, J. Sherson, J. I. Cirac, J. Fiurásek, et E. S. Polzik, “Experimental demonstration of quantum memory for light,” *Nature* **432**, 482–486 (2004).
- [15] T. Chanelière, D. N. Matsukevich, S. D. Jenkins, S.-Y. Lan, T. A. B. Kennedy, et A. Kuzmich, “Storage and retrieval of single photons transmitted between remote quantum memories,” *Nature* **438**, 833–6 (2005). URL <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/16341009>.
- [16] V. C. Vivoli, N. Sangouard, M. Afzelius, et N. Gisin, “High-bandwidth quantum memory protocol for storing single photons in rare-earth doped crystals,” *New Journal of Physics* **15**, 095012 (2013). URL <http://stacks.iop.org/1367-2630/15/i=9/a=095012?key=crossref.2978fd3fc817e2ce1af608a07bc91896>.
- [17] D. Rugar, R. Budakian, H. J. Mamin, et B. W. Chui, “Single spin detection by magnetic resonance force microscopy,” *Nature* **430**, 329–332 (2004). URL <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/15254532>.
- [18] A. Naik, O. Buu, M. D. LaHaye, a. D. Armour, A. A. Clerk, M. P. Blencowe, et K. C. Schwab, “Cooling a nanomechanical resonator with quantum back-action,” *Nature* **443**, 193–196 (2006). URL <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/16971944>.
- [19] M. D. LaHaye, J. Suh, P. M. Echternach, K. C. Schwab, et M. L. Roukes, “Nanomechanical measurements of a superconducting qubit,” *Nature* **459**, 960–964 (2009). URL <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/19536259>.
- [20] N. Timoney, I. Baumgart, M. Johanning, A. F. Varon, M. B. Plenio, A. Retzker, et C. Wunderlich, “Quantum gates and memory using microwave-dressed states,” *Nature* **476**, 185–188 (2011). URL <http://dx.doi.org/10.1038/nature10319><http://www.nature.com/nature/journal/v476/n7359/abs/nature10319.html#supplementary-information>.
- [21] T. Aoki, B. Dayan, E. Wilcut, W. P. Bowen, a. S. Parkins, T. J. Kippenberg, K. J. Vahala, et H. J. Kimble, “Observation of strong coupling between one atom and a monolithic microresonator,” *Nature* **443**, 671–674 (2006).
- [22] S. Camerer, M. Korppi, A. Jöckel, D. Hunger, T. W. Hänsch, et P. Treutlein, “Realization of an Optomechanical Interface Between Ultracold Atoms and a Membrane,” *Physical Review Letters* **107**, 223001 (2011). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.223001>.

- [23] B. Vogell, K. Stannigel, P. Zoller, K. Hammerer, M. T. Rakher, M. Korppi, A. Jöckel, et P. Treutlein, “Cavity-enhanced long-distance coupling of an atomic ensemble to a micromechanical membrane,” *Physical Review A* **87**, 023816 (2013). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.87.023816>.
- [24] B. Gouraud, D. Maxein, A. Nicolas, O. Morin, et J. Laurat, “Demonstration of a Memory for Tightly Guided Light in an Optical Nanofiber,” *Physical Review Letters* **114**, 1–5 (2015). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114.180503>.
- [25] C. S. Aydin, C. C. Lausen, B. A. Lbrecht, P. S. Chneeweiss, et A. R. Auschenbeutel, “Storage of fiber-guided light in a nanofiber- trapped ensemble of cold atoms,” **2**, 353–356 (2015).
- [26] A. Jöckel, A. Faber, T. Kampschulte, M. Korppi, M. T. Rakher, et P. Treutlein, “Sympathetic cooling of a membrane oscillator in a hybrid mechanical–atomic system,” *Nat Nano* **10**, 55–59 (2015). URL <http://dx.doi.org/10.1038/nnano.2014.278><http://www.nature.com/nnano/journal/v10/n1/abs/nnano.2014.278.html#supplementary-information>.
- [27] M. L. Gorodetsky, A. Schliesser, G. Anetsberger, S. Deléglise, et T. J. Kippenberg, “Determination of the vacuum optomechanical coupling rate using frequency noise calibration,” *Optics Express* **18**, 23236 (2010). URL <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-18-22-23236>.
- [28] T. Briant, “Caractérisation du couplage optomécanique entre la lumière et un miroir : bruit thermique et effets quantiques,” .
- [29] M.-T. Jaekel et S. Reynaud, “Quantum limits in interferometric measurements,” **301**, 4 (2001). URL <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0101104>.
- [30] L. Landau et E. Lifshitz, “Cours de physique théorique : Physique statistique (mir, 1967) ch. 12 ; kubo r,” *Rep. Progr. Phys* **29**, 255 (1966).
- [31] S. Reynaud, A. Heidmann, E. Giacobino, et C. Fabre, “Quantum fluctuations in optical systems,” *Progress in optics* **30**, 1–85. URL <http://cat.inist.fr/?aModele=afficheN&cpsidt=4348422>.
- [32] E. Yablonovitch, “Inhibited Spontaneous Emission in Solid-State Physics and Electronics,” *Physical Review Letters* **58**, 2059–2062 (1987).
- [33] S. John, “Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices,” *Physical Review Letters* **58**, 2486–2489 (1987).
- [34] J. J. D. Joannopoulos, S. Johnson, J. N. J. Winn, et R. R. D. Meade, *Photonic crystals : molding the flow of light* (2008). URL [http://books.google.com/books?hl=en&lr=&id=owhE36qiTP8C&oi=fnd&pg=PP2&dq=Photonic+Crystals+Molding+the+Flow+of+Light&ots=6XjrrgfTtL&sig=de1KVRTRbVFyGYHDCOLpWP1xosk\\$\delimiter"026E30F\\$nh](http://books.google.com/books?hl=en&lr=&id=owhE36qiTP8C&oi=fnd&pg=PP2&dq=Photonic+Crystals+Molding+the+Flow+of+Light&ots=6XjrrgfTtL&sig=de1KVRTRbVFyGYHDCOLpWP1xosk$\delimiter)<http://books.google.com/books?id=owhE36qiTP8C&pgis=1>.
- [35] M. Eichenfield, R. Camacho, J. Chan, K. J. Vahala, et O. Painter, “A picogram- and nanometre-scale photonic-crystal optomechanical cavity.” *Nature* **459**, 550–5 (2009). URL <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/19489118>.

- [36] H. R. Böhm, S. Gigan, F. Blaser, A. Zeilinger, M. Aspelmeyer, G. Langer, D. Bäuerle, J. B. Hertzberg, et K. C. Schwab, “High reflectivity high-Q micromechanical Bragg mirror,” *Applied Physics Letters* **89**, 89–91 (2006).
- [37] A. G. Kuhn, M. Bahriz, O. Ducloux, C. Chartier, O. Le Traon, T. Briant, P.-F. Cohadon, A. Heidmann, C. Michel, L. Pinard, et R. Flaminio, “A micropillar for cavity optomechanics,” *Applied Physics Letters* **99**, 121103 (2011). URL <http://link.aip.org/link/APPLAB/v99/i12/p121103/s1&Agg=doi>.
- [38] U. Kemiktarak, M. Metcalfe, M. Durand, et J. Lawall, “Mechanically compliant grating reflectors for optomechanics,” *Applied Physics Letters* **100**, 061124 (2012). URL <http://link.aip.org/link/APPLAB/v100/i6/p061124/s1&Agg=doi>.
- [39] E. Gavartin, R. Braive, I. Sagnes, O. Arcizet, A. Beveratos, T. J. Kippenberg, et I. Robert-Philip, “Optomechanical Coupling in a Two-Dimensional Photonic Crystal Defect Cavity,” *Physical Review Letters* **106**, 203902 (2011). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.203902>.
- [40] T. Antoni, A. G. Kuhn, T. Briant, P.-F. Cohadon, A. Heidmann, R. Braive, A. Beveratos, I. Abram, L. Le Gratiet, I. Sagnes, et I. Robert-Philip, “Deformable two-dimensional photonic crystal slab for cavity optomechanics.” *Optics Letters* **36**, 3434–6 (2011). URL <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/21886235>.
- [41] J. D. Jackson, “Classical electrodynamics,” *Classical Electrodynamics*, 3rd Edition, by John David Jackson, pp. 832. ISBN 0-471-30932-X. Wiley-VCH, July 1998. **1** (1998).
- [42] E. Yablonovitch, T. Gmitter, et K. Leung, “Photonic band structure : The face-centered-cubic case employing nonspherical atoms,” *Physical review letters* **67**, 2295 (1991).
- [43] S. Strauf, “Photonic crystals : Lasing woodpiles,” *Nature Photonics* **5**, 72–74 (2011).
- [44] M. Lončar, T. Yoshie, A. Scherer, P. Gogna, et Y. Qiu, “Low-threshold photonic crystal laser,” *Applied Physics Letters* **81**, 2680–2682 (2002).
- [45] Y. A. Vlasov, M. O’Boyle, H. F. Hamann, et S. J. McNab, “Active control of slow light on a chip with photonic crystal waveguides,” *Nature* **438**, 65–69 (2005). URL <http://dx.doi.org/10.1038/nature04210>http://www.nature.com/nature/journal/v438/n7064/suppinfo/nature04210_S1.html.
- [46] A. Faraon, E. Waks, D. Englund, I. Fushman, et J. Vuckovic, “Efficient photonic crystal cavity-waveguide couplers,” *Appl. Phys. Lett.* **90**, 73102 (2007).
- [47] S. Fan et J. Joannopoulos, “Analysis of guided resonances in photonic crystal slabs,” *Physical Review B* **65**, 1–8 (2002).
- [48] S. Fan et W. Suh, “Resonance in Optical Resonators,” *Journal of the Optical Society America A* **20**, 569–572 (2003).
- [49] S. Peng, T. Tamir, et H. Bertoni, “Theory of Periodic Dielect Waveguides,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* **23** (1975).
- [50] V. Karagodsky, F. G. Sedgwick, et C. J. Chang-Hasnain, “Theoretical analysis of subwavelength high contrast grating reflectors.” *Optics express* **18**, 16973–88 (2010). URL <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/20721086>.

- [51] V. Liu et S. Fan, “S⁴ : A free electromagnetic solver for layered periodic structures,” *Computer Physics Communications* **183**, 2233–2244 (2012). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465512001658>.
- [52] “2d photonic-crystal optomechanical nanoresonator,” .
- [53] P. Lalanne et G. M. Morris, “Highly improved convergence of the coupled-wave method for TM polarization,” *Journal of the Optical Society of America A* **13**, 779 (1996).
- [54] K. S. Yee *et al.*, “Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell’s equations in isotropic media,” *IEEE Trans. Antennas Propag* **14**, 302–307 (1966).
- [55] A. Taflove et S. C. Hagness, *Computational Electrodynamics. The finite-difference time-domain method* (2000).
- [56] J.-P. Berenger, “A perfectly matched layer for the absorbtion of electromagnetic waves,” *Journal of Computational Physics* **114**, 185 (1994).
- [57] A. F. Oskooi, D. Roundy, M. Ibanescu, P. Bermel, J. D. Joannopoulos, et S. G. Johnson, “A flexible free-software package for electromagnetic simulations by the {FDTD} method,” *Computer Physics Communications* **181**, 687–702 (2010).
- [58] A. Talneau, K. H. Lee, S. Guilet, et I. Sagnes, “Efficient coupling to W1 photonic crystal waveguide on InP membrane through suspended access guides,” *Applied Physics Letters* **92**, 1–4 (2008).
- [59] R. B. Bhiladvala et Z. J. Wang, “Effect of fluids on the Q factor and resonance frequency of oscillating micrometer and nanometer scale beams,” *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* **69**, 1–5 (2004).
- [60] Y. Rocard, “Dynamique générale des vibrations,” (1949).
- [61] E. Guyon, J.-P. Hulin, L. Petit, et P.-G. De Gennes, *Hydrodynamique physique* (EDP sciences Les Ulis, France, 2001).
- [62] R. Christian, “The theory of oscillating-vane vacuum gauges,” *Vacuum* **16**, 175–178 (1966).
- [63] B. Li, H. Wu, C. Zhu, et J. Liu, “The theoretical analysis on damping characteristics of resonant microbeam in vacuum,” *Sensors and Actuators A* **77**, 191–194 (1999).
- [64] F. R. Blom, “Dependence of the quality factor of micromachined silicon beam resonators on pressure and geometry,” *Journal of Vacuum Science & Technology B : Microelectronics and Nanometer Structures* **10**, 19 (1992). URL <http://link.aip.org/link/?JVB/10/19/1&Agg=doi>.
- [65] M. G. Suijlen, J. J. Koning, M. J. van Gils, et H. C. W. Beijerinck, “Squeeze film damping in the free molecular flow regime with full thermal accommodation,” *Sensors and Actuators, A : Physical* **156**, 171–179 (2009).
- [66] D. M. Photiadis et J. A. Judge, “Attachment losses of high Q oscillators,” *Applied Physics Letters* **85**, 482 (2004). URL <http://link.aip.org/link/APPLAB/v85/i3/p482/s1&Agg=doi>.

- [67] L. Villanueva et S. Schmid, “Evidence of surface loss as ubiquitous limiting damping mechanism in SiN micro- and nanomechanical resonators,” arXiv preprint arXiv:1405.6115 **227201**, 1–6 (2014). URL <http://arxiv.org/abs/1405.6115>.
- [68] J. Yang, T. Ono, et M. Esashi, “Surface effects and high quality factors in ultrathin single-crystal silicon cantilevers,” Applied Physics Letters **77**, 3860–3862 (2000). URL [http://apl.aip.org/resource/1/applab/v77/i23/p3860_s1\\$%delimater"026E30F\\$nhhttp://scitation.aip.org/getpdf/servlet/GetPDFServlet?filetype=pdf&id=APPLAB000077000023003860000001&idtype=cvips&doi=10.1063/1.1330225&prog=normal](http://apl.aip.org/resource/1/applab/v77/i23/p3860_s1$%delimater).
- [69] C. Zener, “Internal friction in solids. I. Theory of internal friction in reeds,” Physical Review **52**, 230–235 (1937).
- [70] C. Zener, “Internal Frictions in Solids II. General Theory of Thermoelastic Internal Friction,” Physical Review **53** (1938).
- [71] R. Lifshitz et M. L. Roukes, “Thermoelastic Damping in Micro- and Nano-Mechanical Systems,” **61**, 10 (1999). URL <http://arxiv.org/abs/cond-mat/9909271>.
- [72] V. B. Braginsky, *Systems with small dissipation* (University of Chicago Press, 1985).
- [73] A. Akheiser, Journal of Physics USSR p. 1277 (1939).
- [74] C. Molinelli, “Interaction optomécanique à trois modes et refroidissement d’un micro-résonateur mécanique,” .
- [75] H. Kogelnik et T. Li, “Laser Beams and Resonators,” Applied Optics **5**, 1550 (1966). URL <http://ao.osa.org/abstract.cfm?URI=ao-5-10-1550>.
- [76] P.-L. Yu, T. P. Purdy, et C. A. Regal, “Control of Material Damping in High-Q Membrane Microresonators,” Physical Review Letters **108**, 083603 (2012). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.108.083603>.
- [77] I. Katz, A. Retzker, R. Straub, et R. Lifshitz, “Signatures for a Classical to Quantum Transition of a Driven Nonlinear Nanomechanical Resonator,” Physical Review Letters **99**, 1–4 (2007). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.99.040404>.
- [78] R. Almog, S. Zaitsev, O. Shtempluck, et E. Buks, “Noise squeezing in a nanomechanical duffing resonator,” Physical Review Letters **98**, 1–4 (2007).
- [79] R. Almog, S. Zaitsev, O. Shtempluck, et E. Buks, “Signal amplification in a nanomechanical Duffing resonator via stochastic resonance,” Applied Physics Letters **90**, 1–4 (2007).
- [80] I. Kozinsky, H. W. C. Postma, I. Bargatin, et M. L. Roukes, “Tuning nonlinearity, dynamic range, and frequency of nanomechanical resonators,” Applied Physics Letters **88**, 4–6 (2006).
- [81] I. Kozinsky, H. C. Postma, O. Kogan, A. Husain, et M. L. Roukes, “Basins of attraction of a nonlinear nanomechanical resonator,” Physical review letters **99**, 207201 (2007).

- [82] Q. P. Unterreithmeier, T. Faust, et J. P. Kotthaus, “Nonlinear switching dynamics in a nanomechanical resonator,” *Physical Review B - Condensed Matter and Materials Physics* **81**, 1–4 (2010).
- [83] L. Landau, “Mechanics : Volume 1 (course of theoretical physics),” (1976).
- [84] H. J. R. Westra, D. M. Karabacak, S. H. Brongersma, M. Crego-Calama, H. S. J. Van Der Zant, et W. J. Venstra, “Interactions between directly- and parametrically-driven vibration modes in a micromechanical resonator,” *Physical Review B - Condensed Matter and Materials Physics* **84**, 1–4 (2011).
- [85] W. J. Venstra, H. J. R. Westra, et H. S. J. Van Der Zant, “Q-factor control of a microcantilever by mechanical sideband excitation,” *Applied Physics Letters* **99**, 2011–2013 (2011).
- [86] G. P. Agrawal, *Nonlinear fiber optics* (Academic Press, Boston, 1989).
- [87] S. Reynaud, A. Heidmann, E. Giacobino, et C. Fabre, *Progress in Optics XXX* (North-Holland, Amsterdam, 1992).
- [88] D. Hunger, T. Steinmetz, Y. Colombe, C. Deutsch, T. W. Hänsch, et J. Reichel, “A fiber Fabry–Perot cavity with high finesse,” *New Journal of Physics* **12**, 065038 (2010). URL <http://stacks.iop.org/1367-2630/12/i=6/a=065038?key=crossref.e6ea72b3da2564be9138384f611286d0>.
- [89] L. Barsotti et al., “Enhanced sensitivity of the LIGO gravitational wave detector by using squeezed states of light,” *Nature Photonics* **7**, 613–619 (2013). URL <http://www.nature.com/doifinder/10.1038/nphoton.2013.177>.
- [90] O. Arcizet, “Mesure optique ultrasensible et refroidissement par pression de radiation d’un micro-résonateur mécanique.” Th de doctorat, UPMC (2006).
- [91] E. Gavartin, P. Verlot, et T. J. Kippenberg, “A hybrid on-chip optomechanical transducer for ultrasensitive force measurements,” *Nature Nanotechnology* **7**, 509–514 (2012). URL <http://dx.doi.org/10.1038/nnano.2012.97>.
- [92] S. Gigan, H. R. Böhm, M. Paternostro, F. Blaser, G. Langer, J. B. Hertzberg, K. C. Schwab, D. Bäuerle, M. Aspelmeyer, et A. Zeilinger, “Self-cooling of a micromirror by radiation pressure,” *Nature* **444**, 67–70 (2006). URL <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/17080084>.
- [93] A. Dorsel, J. D. McCullen, P. Meystre, E. Vignes, et H. Walther, “Optical Bistability and Mirror Confinement Induced by Radiation Pressure,” *Physical Review Letters* **51**, 1550–1553 (1983).
- [94] V. Braginskii, A. B. Manukin, et M. Y. Tikhonov, “Investigation of dissipative ponderomotive effects of electromagnetic radiation,” *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics* **31**, 829 (1970).
- [95] A. Buonanno et Y. Chen, “Scaling law in signal recycled laser-interferometer gravitational-wave detectors,” *Physical Review D* **67**, 1–26 (2003).
- [96] O. Arcizet, T. Briant, A. Heidmann, et M. Pinard, “Beating quantum limits in optomechanical sensor by cavity detuning,” (2006).
- [97] J. Restrepo, J. Gabelli, C. Ciuti, et I. Favero, “Classical and quantum theory of photothermal cavity cooling of a mechanical oscillator,” *Comptes Rendus Physique* **12**, 860–870 (2011). URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.crhy.2011.02.005>.

- [98] M. W. Den Otter, “Approximate expressions for the capacitance and electrostatic potential of interdigitated electrode,” *Sensors and Actuators, A : Physical* **96**, 140–144 (2002).
- [99] H. Engan, “Excitation of elastic surface waves by spatial harmonics of interdigital transducers,” *IEEE Transactions on Electron Devices* **16**, 1014–1017 (1969).
- [100] M. Pinard, P. F. Cohadon, T. Briant, et A. Heidmann, “Full mechanical characterization of a cold damped mirror,” *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics* **63**, 1–12 (2001).
- [101] W. Suh, Z. Wang, et S. Fan, “Temporal coupled-mode theory and the presence of non-orthogonal modes in lossless multimode cavities,” *IEEE Journal of Quantum Electronics* **40**, 1511–1518 (2004).
- [102] S. Hughes, L. Ramunno, J. F. Young, et J. E. Sipe, “Extrinsic optical scattering loss in photonic crystal waveguides : Role of fabrication disorder and photon group velocity,” *Physical Review Letters* **94**, 1–4 (2005).
- [103] D. Gerace et L. C. Andreani, “Effects of disorder on propagation losses and cavity Q-factors in photonic crystal slabs,” *Photonics and Nanostructures - Fundamentals and Applications* **3**, 120–128 (2005).
- [104] S. Johnson et J. Joannopoulos, “Block-iterative frequency-domain methods for Maxwell’s equations in a planewave basis.” *Optics express* **8**, 173–190 (2001).
- [105] H. Hosaka, K. Itao, et S. Kuroda, “Damping characteristics of beam-shaped micro-oscillators,” *Sensors and Actuators A* **49**, 85–87 (1995).
- [106] K. Kokubun, “Unified formula describing the impedance dependence of a quartz oscillator on gas pressure,” *Journal of Vacuum Science & Technology A : Vacuum, Surfaces, and Films* **5**, 2450 (1987).
- [107] F. R. Blom, “Dependence of the quality factor of micromachined silicon beam resonators on pressure and geometry,” *Journal of Vacuum Science & Technology B : Microelectronics and Nanometer Structures* **10**, 19 (1992).
- [108] D. Rugar et P. Grütter, “Mechanical parametric amplification and thermomechanical noise squeezing,” *Physical Review Letters* **67**, 699 (1991).
- [109] M. Pinard et A. Dantan, “Quantum limits of photothermal and radiation pressure cooling of a movable mirror,” *New Journal of Physics* **10** (2008).
- [110] I. Favero et K. Karrai, “Optomechanics of deformable optical cavities,” *Nat Photon* **3**, 201–205 (2009). URL <http://dx.doi.org/10.1038/nphoton.2009.42>.
- [111] S. De Liberato, N. Lambert, et F. Nori, “Quantum limit of photothermal cooling,” *arXiv preprint arXiv :1011.6295* (2010).
- [112] Y. Rocard, “Dynamique générale des vibrations,” (1949).
- [113] E. Guyon, J.-P. Hulin, L. Petit, et P.-G. De Gennes, *Hydrodynamique physique* (EDP sciences Les Ulis, France, 2001).

Sujet : Nano-membranes à cristal photonique pour l'optomécanique

Résumé : Dans ce manuscrit, nous présentons le développement d'un résonateur optimisé pour observer des effets quantiques du couplage entre un résonateur mécanique et le champ électromagnétique via la pression de radiation. Celui-ci doit combiner une réflectivité élevée, une faible masse, ainsi qu'un facteur de qualité mécanique élevé. Le résonateur consiste en une membrane suspendue de quelques centaines de nanomètres d'épaisseur, et de quelques dizaines de microns de côté, présentant une réflectivité importante grâce à l'utilisation de cristaux photoniques. Après une étude détaillée de la physique d'un cristal photonique en incidence normale, nous présentons les résultats expérimentaux, en bon accord avec des simulations optiques, notamment lorsque la membrane est utilisée comme miroir de fond d'une cavité Fabry-Perot. Dans un second point, nous passons en revue les mécanismes d'amortissement mécanique à l'œuvre dans les micro-résonateurs. Nous montrons ensuite comment l'introduction de contraintes peut améliorer leur facteur de qualité. Nous finissons la caractérisation mécanique par l'étude de non-linéarités apparaissant lors des grandes amplitudes de mouvement. Puis nous présentons le montage expérimental permettant l'observation du bruit thermique de ces résonateurs. Celui-ci a également permis d'obtenir des résultats préliminaires sur le refroidissement de leur bruit thermique par friction froide et par effet photothermique. Enfin, nous présentons le développement d'un système de couplage capacitif entre la membrane et un circuit électrique, constituant la première étape de la réalisation d'un transducteur optomécanique entre photons optiques et micro-ondes.

Mots clés :

Subject : Photonic crystal nanomembranes for optomechanic

Résumé : The field of optomechanic consists in studying the coupling induced by the radiation pressure between a mechanical resonator and a light field, it has expanded over the last fifteen years. In this memoir we present the development of a resonator optimised to observe quantum effect of the optomechanical coupling. On the one hand, it has to combine a high reflectivity and a low mass to enhance its coupling with the light field. On the other hand it should exhibit high mechanical quality factor in order to minimize its interaction with the environment. This resonator is a suspended membrane, whose thickness is about hundreds of nanometers, and whose reflectivity is achieved thanks to a photonic crystal. After a study of the photonic crystal physics in normal incidence, we present the experimental results including those in the end mirror of a Fabry-Pérot cavity configuration, which are in good agreement with the optical simulations. In a second point, we list the dissipation mechanisms in micro-resonator. Then we show how the stress introduction in such resonators can improve the quality factor. We finish the mechanical characterisation by studying mechanical non-linearities which appears in the case of large amplitude of motion. Then we present the experimental set-up developed to observe the thermal noise of the resonators. We also obtain some preliminary results about the cooling of the thermal noise using active cooling and photothermal effect. Last we present the development of a capacitive coupling between the membrane and an electrical circuit. This device is the first step toward the realisation of an optomechanical transducer between optical and micro-wave photons.

Keywords : Optomechanic, Photonic crystal, Capacitive coupling, NEMS, Nano-resonator, Micro-cavity, Active cooling.